Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri” Iaşi

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

pentru concursul de matematică "Euclid", ediţia a XII-a

Clasele III-VIII

IAŞI - 2012

Liceul Teoretic "Vasile Alecsandri" Iaşi

Fundamentarea actului educațional pe baza nevoilor de dezvoltare personală şi profesională a elevilor din perspectiva dezvoltării durabile şi a deschiderii sistemului educațional către societate, în contextul integrării europene

C U P R I N S

Argument ***4***

Programul de desfăşurare al concursului ***5***

Comisia de concurs **6**

Autori **7**

Subiecte date la edițiile anterioare **8**

EDIȚIA a XI-a 8
EDIȚIA a X-a 20
EDIȚIA a IX-a 32
EDIȚIA a VIII-a 37
EDIȚIA a VII-a 42
EDIȚIA a VI-a 46
EDIȚIA a V-a 55

Probleme şi exerciții propuse **65**

Clasele a III-a şi a IV-a 65
Clasa a V-a 79
Clasa a VI-a 84
Clasa a VII-a - algebră 88
Clasa a VII-a - geometrie 93
Clasa a VIII-a - algebră 101
Clasa a VIII-a - geometrie 105

Indicații şi răspunsuri **112**

Clasele a III-a şi a IV-a 112
Clasa a VII-a - algebră 126
Clasa a VII-a - geometrie 129
Clasa a VIII-a - algebră 133
Clasa a VIII-a – geometrie 135

Bibliografie ***136***

Argument

Concursul de matematică EUCLID a luat fiinţă în anul 2001, la iniţiativa profesorilor de matematică de la Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri” din Iaşi.

Denumirea acestuia provine de la numele celebrului matematician grec care a pus bazele geometriei plane şi spaţiale şi ale aritmeticii. Însemnata sa operă, ***Elemente***, alcătuită din 13 capitole a constituit, timp de două milenii, cartea de căpătâi după care s-a predat matematica. A fost tradusă în aproximativ 300 de limbi, fiind cea mai citită carte din lume.

Euclid a adus multe contribuţii originale: a enunţat teoreme noi: *teorema catetei, a înălţimii* (unui triunghi dreptunghic), *a concurenţei mediatoarelor unui triunghi, a reciprocei teoremei lui Pythagoras, a teoremei împărţirii cu rest* (pentru numere naturale), *a descompunerii în factori primi a unui număr întreg* (pozitiv); i se datorează noţiunile de *semidreaptă, tangentă* (la o curbă), *cerc mare* (al unei sfere), *puterea unui punct* faţă de un cerc sau o sferă, ca şi denumirile de *paralelogram, poliedru, prismă, tetraedru*, a formulat definiţii – cele pentru *cerc* şi *sferă* rămânând în uz.

Concursul EUCLID se adresează elevilor din clasele III-VIII la Şcolile Generale din judeţul Iaşi, iar anul acesta se află la cea de a XI-a ediţie.

Organizatorii şi-au propus ca, prin acest eveniment, să stimuleze spiritul COMPETITIV al elevilor şi să le dezvolte nevoia de cunoaştere şi înţelegere.

Concursul se bucură de aprecierea participanţilor pentru probele la care au posibilitatea să între în competiţie:

- ***proba individuală*** – oferă posibilitatea fiecărui participant de a-şi demonstra competenţele dobândite în domeniul matematicii.

- ***proba pe echipaje*** – dezvoltă abilitatea de a lucra în echipă şi dă posibilitatea fiecărei echipe de a promova imaginea şcolii.

Elevii din clasa a IV-a cu rezultate foarte bune la concurs au posibilitatea să se înscrie la Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri” fără a mai susţine examenul de admitere în clasa a V-a.

Festivitatea de premiere are loc, în fiecare an, la Universitatea „Al. I. Cuza” Iaşi.

Parteneriatul dintre Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri” şi Universitatea „Al. I. Cuza” Iaşi demonstrează încă o dată aprecierea de care se bucură Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri” în comunitatea educaţională.

Autorii

Programul de desfăşurare al concursului

15 – 27.03.2012 – Înscrierea participanților

31.03.2012 – Susținerea probelor de concurs

NOTĂ:

Programul de desfăşurare al concursurilor, repartizarea pe săli, vor fi afişate la avizierul liceului până pe 30.03.2012. De asemenea, informații se pot afla consultând site-ul liceului: www.lvais.ro.

Concurs de matematică “EUCLID”

EDIȚIA a XII-a

Comisia de concurs

Preşedinte de onoare:

prof. univ. dr. Mihai Anastasiei

Preşedinte:

prof. Nelu Tudorache – director

Vicepreşedinte:

prof. Ecaterina Ursu

Membri:

prof. Bodron Dochia
prof. Grigoraş Julieta
prof. Leontieş Rodica
prof. Nistor Alina
prof. Nistor Gheorghiță
prof. Ungureanu Sînziana
prof. Mihuț Elena

Secretari:

prof. Cojocariu Beatris
inf. Cojocaru Gabriela Cătălina
ing. Ionenscu Mihaela

Autori

Coordonator:

prof. Nelu Tudorache

Propunători probleme:

Prof. Berea Gabriela (*1 – 10*)

Înv. Teodora Pantazie (*11-20*)

Problemele *21 – 150* sunt reeditate din ediția 2011.

Clasa a V-a: prof. Mihuț Elena

Clasa a VI-a prof. Ursu Ecaterina

Clasa a VII-a: prof. Ungureanu Sînziana

prof. Nistor Alina

Clasa a VIII-a prof. Bodron Dochia

prof. Nistor Gheorghiță

Tehnoredactare:

Ing. Mihaela Ionescu

Subiecte date la edițiile anterioare

<u>EDIȚIA a XI-a</u>

31 ianuarie 2011

<u>Clasa a III–a</u>

<u>SUBIECTUL I</u>

Aflați numărul necunoscut: $[(1+2\cdot3+4\cdot5+6\cdot7+8+9) - 10\cdot8]\cdot\boldsymbol{x} = 30$

<u>SUBIECTUL II</u>

Fratele meu şi cu mine avem împreună cât jumătate din vârsta tatălui meu.

Câți ani am, dacă fratele meu este cu 4 ani mai mare decât mine, iar tata are 48 de ani ?

<u>SUBIECTUL III.</u>

Şapte copii au în față două coşuri cu mere. Pe rînd, fiecare copil ia două mere din primul coş şi le păstrează pentru el, apoi ia un măr din al doilea coş şi îl pune în primul coş. Când îl ajunge rândul pe al şaptelea copil, acesta ia cele două mere din primul coş, însă nu mai are ce lua din al doilea coş, pentru că acesta este gol.

Să se afle câte mere erau la început în total în cele două coşuri, ştiind că la sfârşit au rămas cinci mere în primul coş.

<u>Barem de corectare clasa a III-a</u>

<u>SUBIECTUL I</u>

a) Efectuează cele patru înmulțiri 10p
b) Efectuează adunările 5p
c) Scrie relația $(86 - 80)\cdot\boldsymbol{x} = 30$ 5p
d) $6\cdot\boldsymbol{x} = 30$ 5p
e) Finalizare 5p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL II.

a) Scrie relația e + f = t : 2 .... 5p
b) Află suma vârstelor copiilor, e + f = 48 : 2 = 24 .... 5p
c) Reprezintă grafic 10p
d) Află vârsta lui e = 10 .... 10p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL III.

a) Din primul coş s-au luat 2+2+2+2+2+2+2 = 14 mere 5p
b) Din al doilea coş s-au luat 6 mere 5p
c) În primul coş erau (14 - 6)+5 = 8+5 = 13 mere 10p
d) În al doilea coş erau 6 mere 5p
e) Finalizare 13+6 = 19 mere 5p

(*30 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

Clasa a IV-a

SUBIECTUL I (*40 puncte*)

a) Într-o cutie sunt 61 de fundițe roşii, verzi şi albe. După ce s-a folosit acelaşi număr de fundițe de fiecare culoare, în cutie au rămas 12 fundițe roşii, 15 fundițe verzi şi 7 fundițe albe. Câte fundițe de fiecare culoare erau la început în cutie?
b) De câte ori semnul + este utilizat în adunarea: 7+7+7...+7=693 ?

SUBIECTUL II (*30 puncte*)

Se împart două numere naturale nenule. Dacă împărțitorul, câtul şi restul sunt numere naturale consecutive, cu suma 30, să se afle deîmpărțitul.

SUBIECTUL III (*20 puncte*)

În beciul bunicului stau aliniate 6 coşuri cu mere. Numărul merelor din două coşuri alăturate diferă cu 1. În coşurile cu număr impar de mere se află 71 de mere, în total. Care este numărul minim de mere ce se poate afla în celelalte coşuri ? (Justificați)

Din oficiu - 10 puncte

Barem corectare clasa a IV-a

SUBIECTUL I (*40 puncte*)

a) - Află numărul de fundițe rămase în cutie: 12+15+7=34 .... 9p
- Află numărul de fundițe folosite de fiecare culoare:
(61 – 34):3 = 9 .... 9p
- Calculează numărul de fundițe de fiecare culoare:
12+9 = 21; 15+9 = 24; 7+9 = 16 .... 7p

b) - Determină de câte ori apare 7 în expresia dată: 693:7=99 .... 10p
- Finalizare: 98 de semne de + ... 5p

SUBIECTUL II (*30 puncte*)

- Află numerele consecutive: 9, 10, 11 …………........…... 15p
- Scrie relația: D = C·Î + R, R<Î ………...……………........ 5p
- Află deîmpărțitul: 109 sau 119 ....…................. 5x2=10p

SUBIECTUL III (*20 puncte*)

- Deduce că sunt 3 coşuri cu număr impar de mere şi 3 coşuri cu număr par de mere …………………..……….......….. 5p
- Stabileşte ordinea coşurilor ………..…………………...…. 6p
- Deduce că în coşurile cu număr par de mere se află cu trei mere mai puțin decât în coşurile cu număr impar de mere .....…..... 6p
- Finalizare: 71 – 3 = 68 mere ……………..............….. 3p

Observație: *Aflarea numărului de mere fără justificare completă va fi apreciată cu 7p.*

Clasa a V-a

SUBIECTUL I

Diferența a două numere naturale este 413. Dacă împărțim numărul mai mare la o treime din numărul mai mic obținem câtul 9 şi restul 53. Aflați cele două numere.

30 puncte

SUBIECTUL II

Fie mulțimea: $A = \{x = 2^{n+1} \cdot 5^n + 5, n \in N\}$.

a) Arătați că $2005 \in A$, iar $2011 \notin A$;

b) Pentru $n = 2011$ aflați suma cifrelor numărului x.

c) Câte pătrate perfecte conține A?

30 puncte

SUBIECTUL III

Numerele naturale nenule se scriu într-un tablou în felul următor:

		1		
	2	3	4	
5	6	7	8	9

....

Astfel 1 se găseşte pe prima linie a tabloului, 2, 3 şi 4 pe linia a doua, 5, 6, 7, 8, 9 pe linia a treia şi aşa mai departe.

a) Aflaţi pe ce linie a tabloului se găseşte 37.

b) Aflaţi pe ce linie a tabloului se găseşte 2011 şi ce poziţie ocupă pe linia respectivă.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a V-a

SUBIECTUL I.

$a - b = 413$ 5p

$a = 3b + 53$ 10p

înlocuieşte şi găseşte $b = 180$ 10p

$a = 593$ 5p

SUBIECTUL II.

a) $2005 \in A$ 5p

$2011 \notin A$ 5p

b) înlocuieşte $n = 2011$ 3p

$x = 10^{2011} \cdot 2 + 5$ 4p

calculează suma cifrelor = 7 .... 3p

c) $n = 0 \Rightarrow x = 7 \neq pp$ 2p

$n = 1 \Rightarrow x = 25 = pp$ 3p

$n \geq 2 \Rightarrow x = 200 \ldots 05 \,\vdots\, 5$ dar nu este divizibil cu 25 .... 5p

SUBIECTUL III.

a) fiecare linie se termină cu pătratul numărului ei 5p

linia 6 se termină cu 36 .... 5p

37 se află pe linia 7 .... 5p

b) $45^2 = 2025 \Rightarrow$ 2011 se găseşte pe linia 45 .... 5p

linia 44 se termină cu 1936 $\Rightarrow$ linia 45 începe cu 1937 .... 5p

2011 ocupă poziţia 75 pe linia 45 .... 5p

Oficiu – 10 puncte

NOTĂ: *Orice altă soluţie corectă se notează cu punctaj corespunzător*

Clasa a VI-a

SUBIECTUL I.

Două fracții având ambele numărătorul 5, au suma $1\frac{33}{77}$. Aflați cele două fracții ştiind că suma numitorilor este 18.

30 puncte

SUBIECTUL II.

Andrei doreşte să îşi ordoneze timbrele într-un clasor. Dacă le aşează câte 5, câte 6, câte 7 sau câte 8, îi rămân, de fiecare dată, 3 timbre. Dacă le aşează câte 9, nu îi rămâne nici unul. Află cel mai mic număr de timbre pe care îl poate avea Andrei.

30 puncte

SUBIECTUL III.

Unghiurile AOB şi BOC sunt adiacente, iar m($\angle$BOC) = $\frac{3}{4}$m($\angle$AOB). Fie (OM bisectoarea unghiului AOB şi fie semidreapta ON astfel încât (OC este în interiorul unghiului BON şi m($\angle$MON)=90^0. Aflați măsurile unghiurilor AOB şi BOC ştiind că m($\angle$CON) = 20^0.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a VI-a

SUBIECTUL I.

$\frac{5}{a}+\frac{5}{b}=1\frac{13}{77}$ 5p

a + b = 18 .... 5p

$\frac{5(a=b)}{ab}=\frac{90}{77}$ 5p

ab = 77 .... 5p

a = 1, b = 77 nu convine 4p

a = 7, b = 11 .... 4p

fracțiile sunt $\frac{5}{7}, \frac{5}{11}$ 2p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL II.

Teorema împărțirii cu rest cu împărțitorii 5, 6, 7 şi 8, iar restul 3 ………………………………………………... 10p

n – 3 = [5, 6, 7, 8]·k, unde k este număr natural ……..…….. 5p

[5, 6, 7, 8] = 840 …………………...........................………… 5p

n = 840k + 3 şi n este divizibil cu 9 ……...........…………… 5p

n = 840·2 + 3 = 1683 ………………….........................……… 5p

(30 puncte)

SUBIECTUL III.

Desen ……………...........................…..................…………… 5p

Măsura unghiului AOB este x, iar măsura lui BOC este $\frac{3}{4}x$ 5p

(OM este bisectoarea unghiului AOB implică

$m(\angle AOM) = m(\angle MOB) = \frac{x}{2}$ 5p

$m(\angle MON) = m(\angle MOB) + m(\angle BOC) + m(\angle CON)$ ……... 5p

$90^0 = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x + 20$; $x = 56^0$ ……….........……..........… 5p

$m(\angle AOB) = 56^0$, $m(\angle BOC) = 42^0$ ….................................... 5p

(*30 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

NOTĂ: *Orice altă soluție corectă se notează cu punctaj corespunzător*

Clasa a VII–a

SUBIECTUL I.

Fie $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... + \frac{\sqrt{2011}-\sqrt{2010}}{\sqrt{2011}\cdot\sqrt{2010}}$.

a) Demonstrați că $A \in (0; 1)$.

b) Arătați că $\sqrt{2011} \cdot A < 44$.

30 puncte

SUBIECTUL II.

Determinați numerele raționale nenule x pentru care $x+\frac{1}{x}$ este întreg. Verificați că în acest caz $x^n+\frac{1}{x^n}$ este întreg oricare ar fi n natural.

30 puncte

SUBIECTUL III.

Considerăm ΔABC isoscel, [AB]≡[AC] cu [AD] mediană şi (DM bisectoarea ∠ADC, unde M∈AC. Perpendiculara din D pe AB intersectează pe AC în Q şi pe AB în N. Arătați că:

a) $\left(\frac{AM}{MC}\right)^2=\frac{AN}{NB}$;

b) triunghiul ΔMDQ este isoscel.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a VII–a

SUBIECTUL I. (*30 puncte*)

a) $A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{2011}}{\sqrt{2011}\cdot\sqrt{2010}}-\frac{\sqrt{2010}}{\sqrt{2011}\cdot\sqrt{2010}}$ 5p

$A=1-\frac{1}{\sqrt{2011}}$ 10p

Finalizare 5p

b) $\sqrt{2011}\cdot A=\sqrt{2011}-1$ 5p

Finalizare 5p

SUBIECTUL II. (*30 puncte*)

$x=\frac{m}{p}\in Q$; m, p∈Q, (m,p) = 1, p ≠ 0 .... 3p

$x+\frac{1}{x}=\frac{m^2+p^2}{mp}\in Z$ 2p

$\Rightarrow m^2+p^2 \vdots mp \Rightarrow \begin{cases} m^2+p^2 \vdots p \\ m^2+p^2 \vdots m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 \vdots p \\ p^2 \vdots m \end{cases}$, (m,p) = 1 .... 15p

$\Rightarrow p=\pm 1$ şi $m=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 1$ 5p

Dacă x = 1 $\Rightarrow x^n+\frac{1}{x^n}=2\in Z$ 2,5p

Dacă x = -1 $\Rightarrow x^n+\frac{1}{x^n}=2(-1)^n\in Z$ 2,5p

SUBIECTUL III.(*30 puncte*)

a) Aplică teorema bisectoarei $\Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{AD}{DC}(1)$ 5p

$\Delta AND \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AN}{ND}=\frac{AD}{DC}(2)$ 5p

(1)=(2) $\Rightarrow \frac{AM^2}{MC^2}=\frac{AN^2}{ND^2}(3)$ 2,5p

$\Delta NDA \sim \Delta NBD \Rightarrow ND^2=NA\cdot NB(4)$ 5p

Din (3),(4) $\Rightarrow \left(\frac{AM}{MC}\right)^2=\frac{AN}{ND}$ 2,5p

b) $m(N\hat{D}B)=m(C\hat{D}Q)=x$ 2,5p

$\Rightarrow m(N\hat{D}B)=m(B\hat{A}D)=m(D\hat{A}C)=x$ 2,5p

(DM bisectoare $\Rightarrow m(A\hat{D}M)=m(M\hat{D}C)=45^0$ 2,5p

$\Rightarrow m(M\hat{D}Q)=m(D\hat{M}Q)=45^0+x \Rightarrow \Delta MDQ$ isoscel 2,5p

Oficiu – 10 puncte

<u>Clasa a VIII-a</u>

SUBIECTUL I

Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{23}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-1}}=201$.

30 puncte

SUBIECTUL II

Ştiind că $x+\frac{1}{x}=5$ şi x ≠ 0, să se afle valoarea expresiei:

$$E(x)=x+x^2+x^3+x^4+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x}.$$

30 puncte

SUBIECTUL III

Fie punctele A, B, C, O necoplanare astfel încât OA=6cm, OB= 8cm, OC=8cm şi $OA \perp OB \perp OC \perp OA$.

a) Realizați un desen conform datelor.

b) Aflați d(O,(ABC)).

c) Dacă $OH \perp (ABC)$, arătați că H este ortocentrul ΔABC.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a VIII-a

SUBIECTUL I.

Raționalizare 10p

Reducerea termenilor 10p

Finalizare $n = 2012^2$ 10p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL II.

Avem $E(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$ 5p

Calculează parantezele 20p

Finalizare E(x) = 665 .... 5p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL III.

a) desen 5p

b) BC = $8\sqrt{2}$ 5p

c) arată H ortocentru Finalizare $n = 2012^2$

.... 10p

(*30 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

ECHIPAJE

SUBIECT CLASA a V-a

1. Fie mulțimea A = {1, 2, 3, …, 2011}

   a) Câți multipli de 3 conține mulțimea A?

   b) Fie B mulțimea elementelor din A care sunt multipli de 3 sau multipli de 5. Câte elemente are B?

2. Să se determine câte numere naturale de forma $\left(\overline{abcabc}\right)^2$ au un număr de 135 divizori.

20 puncte

SUBIECT CLASA a VI-a

1. Fie x, y, z numere naturale astfel ca $x+3|y+2$; $y+5|z+2$ şi $\frac{18}{z+4}\in$N. Să se determine valorile lui x.
2. Fie unghiurile adiacente $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}C$ şi (OX respectiv (OY bisectoarele lor. Ştiind că m($X\hat{O}Y$)=90^0 şi m($B\hat{O}Y$)=3m($B\hat{O}X$), să se afle măsurile unghiurilor $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}C$.

20 puncte

SUBIECT CLASA a VII-a

1. Aflaţi numerele naturale nenule a şi b ştiind că:
$$\frac{(-1)^{n^2+n+2000}}{2a+b}=\frac{2x}{2000a+4000b},$$
unde x = 1+3+5+...+1999 – (2+4+...+1998)
2. În triunghiul ΔABC, $m(\hat{A})=90^0$ şi AB>AC. Considerăm (AD bisectoarea unghiului BAC, D∈(BC) şi CE⊥AD, E∈(AB). Ştiind că [CE]≡[BE] se cere:
   a) Demonstraţi că [DC]≡[DE].
   b) Determinaţi măsurile unghiurilor ΔABC.

20 puncte

SUBIECT CLASA a VIII-a

1. Considerăm $a_n=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ cu n∈N* şi n ≥ 2.
   a) Arătaţi că $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;
   b) Arătaţi că a_n∈Q\N oricare ar fi n∈N* şi n ≥ 2;
   c) Arătaţi că există n∈N* astfel încât $a_n = 2010+\frac{1005}{2012}$
2. Rombul ABCD şi triunghiul echilateral ADE sunt situate în plane diferite. Fie M şi N mijloacele laturilor AE respectiv DE şi O centrul rombului.
   a) Demonstraţi că (MNO)||(BEC).
   b) Calculaţi raportul ariilor triunghiurilor MNO şi BEC.

20 puncte

Barem de corectare ECHIPAJE

CLASA a V-a

1. a) 3, 6, 9, ..., 2010 $\Rightarrow$ 670 multipli 2p
   b) M_5 = {5, 10, 15, …, 2010} $\Rightarrow$ 502 multipli 2p
   $M3 \cap M5 = M_{15}$ = {15, 30, 45, ..., 2010} $\Rightarrow$ 134 multipli 3p
   B = 670 + 502 – 134 = 1038 .... 3p
2. $\left(\overline{abcabc}\right)^2 = \left(\overline{abc}\right)^2 \cdot 1001^2$ 2p
   $\left(\overline{abcabc}\right)^2 = \left(\overline{abc}\right)^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ 2p
   135 = $5 \cdot 3^3 \Rightarrow \overline{abc} = p^2$, cu p număr prim 2p
   $\Rightarrow p \in \{17, 19, 23, 29, 31\}$ 2p
   Deci sunt 5 numere 2p

(*20 puncte*)

CLASA a VI-a

1. z + 4 este divizor al lui 18 .... 3p
   z este 2, 5 sau 15 .... 1p
   z = 2 nu convine 1p
   z = 5 şi y + 5 divide 7 implică y este 2 .... 1p
   x + 3 divide 5 implică x = 2 .... 1p
   z = 15 şi y + 5 divide 17 implică y = 12 .... 1p
   x + 3 divide 14 iplică x este 4 sau 11 .... 2p

2. Desen 2p
   Măsura unghiului XOB este ***a***, a unghiului BOY este 3***a*** 2p
   4***a*** = 90^0 implică ***a*** este $22^0 30'$ 2p
   Măsura unghiului AOB este 45^0 .... 2p
   Măsura unghiului BOC este 135^0 .... 2p

(*20 puncte*)

CLASA a VII-a

1. $n^2 + n + 2000 = n(n+1) + 2000$ = număr par 2p
   x = 1000 .... 3p
   Obţine $\frac{1}{2a+b} = \frac{1}{a+2b}$ 2p
   a = b = 1 .... 3p

2. a) Observă că ΔACE dreptunghic şi isoscel $\Rightarrow [AC] \equiv [AE]$ 2p

$\Delta CAD \equiv \Delta EAD \Rightarrow [CD] \equiv [DE]$ 3p

b) $m(\widehat{CEB}) = 135^0 \Rightarrow m(\widehat{EBC}) + m(\widehat{ECB}) = 45^0$ 2p

ΔCEB isoscel $\Rightarrow m(\widehat{EBC}) = 22^0 30'$ 2p

$m(\widehat{ACB}) = 67^0 30'$.. 1p

(*20 puncte*)

CLASA a VIII-a

1. a) $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n(n+1)} =$

$= 1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2n+2-2n-2}{n(n+1)} = 1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 4p

b) $a_n = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} =$

$= n-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1} = n-\frac{n+3}{2(n+1)}$

$\frac{n+3}{2(n+1)} < 1 \Rightarrow a_n \in Q \setminus N$ 4p

c) $a_n = n-1+1-\frac{n+3}{2(n+1)} = n-1+\frac{n-1}{2(n+1)} = 2010+\frac{2010}{2\cdot 2012} \Rightarrow n=2011$ 2p

2. a) Arată că planele sunt paralele 6p

b) Unghiurile OMN şi ECB sunt congruente ca având laturile respectiv paralele. Atunci, $2\cdot$aria(MNO)=MN$\cdot$MOsin$(\widehat{OMN})$, iar $2\cdot$aria(BEC)=EC$\cdot$BCsin$(\widehat{ECB})$ 2p

raportul cerut este $\frac{1}{4}$ 2p

(*20 puncte*)

NOTĂ: *Orice altă soluție corectă se notează cu punctaj corespunzător*

EDIȚIA a X-a

1 aprilie 2010

Clasa a III–a

SUBIECTUL I

Ştiind că: a=24+35:7-8; b=50-4x 9-5; c=60-(54:6+4x12), află (a+b)xc=?

SUBIECTUL II

Suma vârstelor membrilor unei familii compusă din cinci persoane este 76. Află vârsta fiecăruia, ştiind că vârsta mamei este egală cu a tatălui, iar vârsta celor trei copii este reprezentată prin trei numere naturale consecutive, suma lor fiind 12.

Câți ani are fiecare membru al familiei?

SUBIECTUL III.

Păcală şi Tândală au pornit spre târg, având fiecare câte un sac de pepeni (pepenii sunt de aceeaşi greutate). Pe drum, Tândală a început să se plângă de greutatea sacului său.

- Nu te mai văita degeaba, îi spuse Păcală. Uite, dacă cineva ar lua un pepene din sacul tău, eu aş căra o greutate de două ori mai mare ca tine, iar dacă eu ți-aş da un pepene de la mine, am avea de dus greutăți la fel de mari.

Câți pepeni avea în sac fiecare personaj?

Barem de corectare clasa a III-a

SUBIECTUL I

Calculează 35:7 .... 2p
Calculează 24 + 5 .... 1p
Finalizare a = 21 .... 2p
Calculează 4 x 9 .... 2p
Calculează 50 – 36 .... 1p
Finalizare b = 9 .... 2p
Calculează 54:6 .... 2p
Calculează 4 x 12 .... 4p
Paranteza 2p
Finalizare c = 3 .... 2p
Calculează (a+b) 5p
Finalizare 5p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL II.
Scrie relația sumei vârstelor membrilor familiei 5p
Scrie relația sumei vârstelor copiilor 5p
Determină suma vârstelor părinților 10p
Determină vârsta fiecărui părinte 4p
Determină vârsta fiecărui copil 6p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL III.
Scrie relația: T – 1 .... 5p
Scrie relația: 2(T – 1) 5p
Scrie relația: T + 1 .... 3p
Scrie relația: P – 1 .... 3p
Egalizează ultimele două relații: P – 1 = T + 1 .... 3p
Concluzionează: P = T + 2 .... 1p
Scrie relația: 2(T – 1) = T + 2 .... 3p
Efectuează calculele în relația 2T – 2 = T + 2 .... 3p
Află: T = 4 pepeni 1p

(*30 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

Clasa a IV-a

Problema 1 (*40 puncte*)

c) Scrieți toate numerele naturale de patru cifre distincte, care au cifra zecilor 7 şi suma cifrelor 11.
d) Suma a două numere naturale este 999. Dacă adunăm 3 la fiecare din cele două numere, iar apoi le înmulțim cu 2, cât va fi suma numerelor obținute?

Problema 2 (*25 puncte*)

Fie trei numere naturale diferite de zero. Dacă se împarte primul număr la al doilea, se obține câtul 3 şi restul 3, iar dacă se împarte al treilea la al doilea se obține câtul 5 şi restul 2.

Ştiind că diferența dintre al treilea şi primul număr este 121, aflați cele trei numere.

Problema 3 (*25 puncte*)

Acum, suma vârstelor mamei şi fiului este cu 4 ani mai mare decât vârsta tatălui. Peste 9 ani , fiul va avea o treime din vârsta mamei şi toți trei împreună vor avea 115 ani. Ce vârstă are fiecare acum?

Din oficiu - 10 puncte

Barem corectare clasa a IV-a

Problema 1 (*40 puncte*)

a) Scrie forma numărului $\overline{ab7c}$ .... 4 p
  Deduce că a+b+c = 4 .... 8 p
  Scrie soluțiile 1073; 1370; 3071; 3170 .... 8 p (2 p/soluție)
b) Scrie a+b = 999 .... 2 p
  Scrie (a+3)·2+(b+3)·2 sau justifică........................ 12 p
  Află suma numerelor obținute: 2010......................... 6 p

Problema 2 (*25 puncte*)

Reprezentarea grafică...10 p
Deduce că 2p+2 = 124, p = 61 ....7 p
Află numerele: 186; 61; 307 .... 8 p

Problema 3 (*25 puncte*)

Reprezentarea grafică .... 4 p
Din fig.2 deduce ca suma vârstelor acum a celor trei este 115-27=88..4 p
Folosind fig.1 află că vârsta tatălui este 42 de ani, iar suma vârstei mamei şi a fiului este 46 de ani.................................. 6 p
Află că peste 9 ani suma vârstelor mamei şi a fiului este 64 de ani ... 4 p
Află că peste 9 ani mama are 48 de ani, iar fiul 16 ani .... 4 p
Finalizare: tata: 42 ani, mama: 39 ani, fiul: 7 ani .... 3 p

Notă: *Oricărei alte soluții corecte i se va acorda punctaj maxim.*

Clasa a V-a

SUBIECTUL I

Determinați suma numerelor naturale mai mici decât 2000, care împărțite la 49 dau câtul egal cu restul.

30 puncte

SUBIECTUL II

Fie mulțimile: A={x∈N| $\frac{11}{2x+1}$ este fracție supraunitară} şi B={x∈N| x = 2a, a∈N şi a ≤ 4}. Calculați A∪B şi (A∩B)∪(B\A).

30 puncte

SUBIECTUL III

Un număr de 1236 de cifre este scris cu cifrele 1, 2 şi 3 şi cu 12 zerouri. Numărul de apariţii al cifrei 1 este de două ori mai mic decât numărul de apariţii al cifrei 2 şi de trei ori mai mic decât numărul de apariţii al cifrei 3. Aflaţi suma cifrelor numărului.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a V-a

SUBIECTUL I.

Teorema împărțirii cu rest...5p
D=Cx49+R, R<49, R=C……………………………………10p
D=49xC+C, D<2000………………………………………...5p
D este 50x0, 50x1, 50x2, … , 50x39……………………..….5p
Calculează suma 39000……………………………………...5p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL II.

2x+1<11…………………………………………………...5p
A={0,1,2,3,4}……………………………………………...5p
a∈{0,1,2,3,4}……………………………………………....5p
B={1,2,4,8,16}…………………………………………….5p
A∪B………………………………………………………….5p
(A∩B)∪(B\A)..5p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL III.

Numărul aparițiilor cifrelor 1, 2 şi 3 este 1235-12......................10p
Cifra 1 apare de a ori, cifra 2 de 2a ori, cifra 3 de 3a ori...............5p
a+2a+3a=1224……………………………..………………….5p
a=204…………………………..……………………………….5p
Suma cifrelor este 2856…………………………………………5p

(*30 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

NOTĂ: *Orice altă soluție corectă se notează cu punctaj corespunzător*

Clasa a VI-a

SUBIECTUL I.

Fie ABCD un pătrat, AB = 6 cm, E un punct în interiorul pătratului astfel încât ΔBEC = echilateral.

a) Aflați $m(\widehat{AEB})$

b) Aflați $m(\widehat{AED})$

c) Calculați lungimea perpendicularei dusă din E pe AB.

35 puncte

SUBIECTUL II.

Fie x, y, z numere naturale nenule, astfel încât: $\frac{xy+yz}{2xz}=\frac{66}{35}$; $\frac{3zy}{x^2+xz}=\frac{55}{28}$; $\frac{3z^3}{x^2y+xyz}=\frac{125}{308}$. Aflați x, y, z ştiind că $x^2+y^2+z^2=4875$.

35 puncte

SUBIECTUL III.

M-am trezit noaptea şi m-am uitat la ceas. Arăta ora 2. Apoi mi-am dat seama că ceasul era oprit. L-am întors şi am adormit din nou. Când m-am trezit, la radio s-a anunțat ora 7, în timp ce ceasul meu indica ora 5:30. La ce oră m-am trezit noaptea ?

20 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a VI-a

SUBIECTUL I.

a) Găseşte $m(\widehat{AEB})=75^\circ$ 10p

b) Găseşte $m(\widehat{DAE})=m(\widehat{ADE})=15^\circ$ 10p

c) Găseşte $m(\widehat{AED})=150^\circ$ 5p

d(E,AB) = 3 cm 10p

(*35 puncte*)

SUBIECTUL II.

Scrie: $\frac{y(x+z)}{2xz}=\frac{66}{35}$ 5p

$\frac{3zy}{x(x+z)}=\frac{55}{28}$ 5p

$\frac{3z^3}{xy(x+z)}=\frac{125}{308}$ 5p

Calculează: $\frac{3y^2}{2x^2}=\frac{66}{35}\cdot\frac{55}{28}\Rightarrow\frac{3y^2}{2x^2}=\frac{33\cdot 11}{7\cdot 14}\Rightarrow y^2=\frac{11^2\cdot x^2}{7^2}$ 5p

$\frac{3z^2}{2x^2}=\frac{66}{35}\cdot\frac{125}{308}\Rightarrow\frac{3z^2}{2x^2}=\frac{3}{7}\cdot\frac{25}{14}\Rightarrow z^2=\frac{25^2\cdot x^2}{7^2}$ 5p

$x^2+\frac{11^2\cdot x^2}{7^2}+\frac{25\cdot x^2}{7^2}=4975$ 5p

$\left.\begin{array}{l} x^2=49\cdot 25\Rightarrow x=35 \\ y=55 \\ z=25 \end{array}\right\}$ 5p

(35 puncte)

SUBIECTUL III.

Calculează diferența 7 – 5:30 = 1 oră şi jumătate (1:30) 5p

Calculează 2 + 1:30 = 3:30 .... 5p

Concluzie: ora la care s-a trezit este 3:30 .... 10p

(*20 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

NOTĂ: *Orice altă soluție corectă se notează cu punctaj corespunzător*

Clasa a VII–a

SUBIECTUL I.

a) Aflați numerele de două cifre $\overline{xy}$, x < y astfel încât $\sqrt{\overline{xy}+\overline{yx}-6(x+y)}\in N$.

b) În triunghiul ΔABC, înălțimea BE, BE ⊥ AC, E∈(AC) are lungimea egală cu lungimea laturii AC. Pătratul MNPD are vârfurile situate pe laturile triunghiului astfel încât M∈(AB), D∈(BC) şi N, P∈(AC). Dacă BE=AC=$a\sqrt{3}$, demonstrați că dublul ariei pătratului este egală cu aria ΔABC.

30 puncte

SUBIECTUL II.

Arătați că dacă $x^2+y^2=6xy$, unde $x>y>0$, atunci raportul dintre diferența şi suma dintre $\sqrt{x}$ şi $\sqrt{y}$ are valoarea $\sqrt{2}$ -1.

30 puncte

SUBIECTUL III.

În triunghiul ΔABC m($\angle$A)=90° iar E şi F sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Ştiind că AC=4cm şi că AF $\perp$ CE aflaţi lungimile laturilor AB şi BC.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a VII–a

SUBIECTUL I. (*30p*)

a) $\sqrt{\overline{xy}+\overline{yx}-6(x+y)} \in N \Rightarrow \sqrt{11(x+y)-6(x+y)}=\sqrt{5(x+y)}$ …… 5p

$\sqrt{5(x+y)} \in N \Rightarrow x+y=5$ ………..……………………………..... 5p

$\overline{xy} \in \{14,23\}$……………………………………...……………….. 5p

b) Notez latura pătratului cu l şi BE$\cap$MD={F}

$\Delta BMD \sim \Delta BMD \Rightarrow \frac{MD}{AC}=\frac{BF}{BE}$ ………………………………..2,5p

Înlocuind se obţine $\frac{l}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}-l}{a\sqrt{3}}$ …………………………2,5p

Rezolvă ecuaţia $\Rightarrow l=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ …………………………...2,5p

Află $A_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2}{2}$ ……………………….……2,5p

$A_{MNPD}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3a^2}{4}$ ………………………………………2,5p

Finalizare $A_{\Delta ABC}=2\cdot A_{MNPD}$ ………………....……..……2,5p

SUBIECTUL II.(*30p*)

Scrie $(x-y)^2=4xy \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=2\sqrt{xy}$ ………...…. 10p

Scrie $(x+y)^2=8xy \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=2\sqrt{xy}(\sqrt{2}+1)$ ……..……. 10p

Scrie raportul $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$ …….10p

SUBIECTUL III.(*30p*)

AF şi CE mediane, AF $\cap$ CE={G} $\Rightarrow$ BG $\subset$ BM ………………. 5p

Află GM = 2cm şi notează AG=2x, GF = x ………..……….… 5p

BG = 4cm GC=2y, EG = y

Aflăm din T.c. în ΔAEC $\Rightarrow y = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ …………………………… 5p

Aflăm din T.h. în ΔAEC $\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ …………………………… 5p

Aflăm AE cu T.P. în ΔAGE, AE=$2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$ ………..…. 5p

Află BC=$4\sqrt{3}$ ……………………………………………...…. 5p

Oficiu – 10 puncte

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Să se determine funcția f : R → R, f(x) = ax+b, a < 0, care verifică condițiile: $f(\sqrt{2})\cdot f(-\sqrt{2}) = f^2(0) - 2$ şi A(-3,5) aparține graficului funcției.

b) Pentru a = –1 şi b = 2, aflați valoarea produsului P = f(0)·f(1)·…· f(2010).

30 puncte

SUBIECTUL II

Fie a,b∈R astfel încât a + b = 2010 şi $a^2 + b^2 = 2010^2$.

a) Aflați a·b, $a^3 + b^3$, $a^4 + b^4$.

b) Arătați că numărul N = $(a^5+b^5)+(a^4+b^4)+…+(a+b)$ nu este pătrat perfect.

30 puncte

SUBIECTUL III

În SABC o piramidă triunghiulară regulată, de bază ABC. Punctul M este mijlocul muchiei BC, SM ⊥ SA şi SA = $6\sqrt{2}$ cm.

a) Arătați că AB = 12 cm.

b) Calculați volumul piramidei SABC,

c) Fie punctele A’ şi B’ mijloacele muchiilor SA, respective SB, iar P şi Q proiecțiile punctelor A’ şi B’ pe planul (ABC). Aflați aria ΔCPQ.

30 puncte

Oficiu – 10 puncte

Barem de corectare clasa a VIII-a

SUBIECTUL I.

a) $f(\sqrt{2})$ 3p

$f(-\sqrt{2})$ 3p

$f(0)$ 3p

$a^2 = 1, a < 0$ 5p

$f(-3) = 5$ 2p

$b = 2$ 3p

$f(x) = -x + 2$ 1p

b) $f(2) = 0$ 6p

$P = 0$ .... 4 p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL II.

a) $a \cdot b = 0$ 5p

$a^3 + b^3 = 2010^3$ 5p

$a^4 + b^4 = 2010^4$ 5p

b) $a^5 + b^5 = 2010^5$ 5p

$N = 2010^5 + 2010^4 + \ldots + 2010$

$N \vdots 5$ dar $N \not\vdots 5^2 \Rightarrow$ nu este pătrat perfect 10p

(*30 puncte*)

SUBIECTUL III.

a) $AB = 12$ cm 10p

b) $V = 72\sqrt{2}$ cm^3 .... 10p

c) P mijlocul [AO] 2p

Q mijlocul [BO] 2p

$A\Delta CPQ = 15\sqrt{3}$ cm^2 .... 6p

(*30 puncte*)

Oficiu – 10 puncte

ECHIPAJE

SUBIECT CLASA a V-a

1. Trei prieteni au cumpărat împreună o minge. Primul a dat $\frac{1}{5}$ din sumă, al doilea $\frac{3}{5}$ din rest iar al treilea restul de 8 lei. Care a fost prețul mingii?
2. Numerele naturale a, b, c împărțite respectiv la 5, 6, 7 dau acelaşi cât şi acelaşi rest. Aflați numerele ştiind că suma lor este 66.

20 puncte

SUBIECT CLASA a VI-a

1. Dintr-un grup de elevi 6 sunt din clasa a VI-a A (4 fete şi 2 băieţi) iar 8 sunt din clasa a VI-a B (5 băieţi şi 3 fete). Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un elev acesta să fie:
   a) fată ?
   b) băiat ?
   c) fată din clasa a VI-a A ?
   d) băiat din clasa a VI-a B ?
2. Unghiurile $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}C$ sunt adiacente, [OD şi respectiv [OE sunt bisectoarele lor. Dacă $m(B\hat{O}C)=5\cdot m(A\hat{O}B)$ şi $m(D\hat{O}E)=60^{o}$, aflaţi:
   a) $m(A\hat{O}B)$
   b) $m(B\hat{O}C)$
   c) $m(A\hat{O}E)$

20 puncte

SUBIECT CLASA a VII-a

1. a) Dacă $a = 5^2 + 7^2$ scrieţi a^2 ca sumă de două pătrate perfecte.
   b) Arătaţi că dacă un număr se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte atunci şi pătratul său se poate scrie tot ca sumă de două pătrate perfecte.
2. Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Se notează h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor corespunzătoare laturilor. Dacă $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$ atunci arătaţi că triunghiul dat este dreptunghic.

20 puncte

SUBIECT CLASA a VIII-a

1. Determinaţi numerele reale x, y, z care verifică relaţia: $z^2+\sqrt{9x^2-42x+49}+\left|y^2-4\right|=6z-9$.
2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' în care AB=40 cm, AD=15 cm şi A'A=48 cm. Fie E mijlocul segmentului AB şi F mijlocul segmentului CC'. Aflaţi:
   c) Distanţa de la F la DE
   d) Măsura unghiului dintre planele (DEF) şi (ABC).

20 puncte

Barem de corectare ECHIPAJE

CLASA a V-a

1. p – prețul

Primul copil: $\frac{p}{5}$, rest $\frac{4p}{5}$ ………………………………………… 3p

Al doilea copil: $\frac{12p}{25}$ ………………………………………… 2p

$\frac{p}{5}+\frac{12p}{25}+8=p$ ………………………………………… 3p

$p = 25$ ………………………………………… 2p

2. $a=5k+r$, $0\le r<5$; $b=6k+r$, $0\le r<6$; $c=7k+r$, $0\le r<7$ ………………… 4p

$a + b + c = 18k + 3r$ ………………………………………… 1p

$18k + 3r = 60$ ………………………………………… 2p

$a = 19$; $b = 22$; $c = 25$ ………………………………………… 3p

(*20 puncte*)

CLASA a VI-a

1. a) $\frac{1}{2}$ ………………………………………… 2,5p

b) $\frac{1}{2}$ ………………………………………… 2,5p

c) $\frac{2}{7}$ ………………………………………… 2,5p

d) $\frac{5}{14}$ ………………………………………… 2,5p

2. $m(\hat{AOD}) = m(\hat{DOB}) = x$; $m(\hat{BOE}) = m(\hat{EOC}) = y$

$y = 5x$ ………………………………………… 2p

$x = 10$; $y = 50$ ………………………………………… 2p

a) $m(A\hat{O}B) = 20^{o}$ ………………………………………… 2p

b) $m(B\hat{O}C) = 100^{o}$ ………………………………………… 2p

c) $m(A\hat{O}E) = 70^{o}$ ………………………………………… 2p

(*20 puncte*)

CLASA a VII-a

1. a) $a^2 = (5^2 - 7^2)^2 + (2\cdot5\cdot7)^2$ 4p
   b) $a^2 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 3p
   c) $a^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)^2$ 3p

2. $S = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$ 2,5p

   $h_a = \dfrac{2S}{a}$; $h_b = \dfrac{2S}{b}$; $h_c = \dfrac{2S}{c}$ 2,5p

   $\dfrac{a^2}{4S^2} = \dfrac{b^2}{4S^2} + \dfrac{c^2}{4S^2}$ 2,5p

   $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ triunghi dreptunghi 2,5p

(*20 puncte*)

CLASA a VIII-a

1. $z^2 - 6z + 9 = (z - 3)^2$ 2p

   $\begin{cases} (z-3)^2 = 0 \\ 9x^2 - 42x + 49 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ 4p

   $\begin{cases} x = \dfrac{7}{3}; y = +2;\ z = 3 \\ x = \dfrac{7}{3}; y = -2;\ z = 3 \end{cases}$ 4p

2. a) Aplică teorema celor 3 perpendiculare 3p

   $\begin{cases} CM = 24 \\ FM = 24\sqrt{2} \end{cases}$, unde $CM \perp DE$ 3p

b) Determină unghiul planelor 2p
   Unghiul are 45° 2p

(*20 puncte*)

NOTĂ: *Orice altă soluție corectă se notează cu punctaj corespunzător*

EDIȚIA a IX-a

2009

Clasa a III-a

1. a) Se consideră următorul şir de numere: 801, 395, 189, 703, 195, 119, 311. Să se ordoneze numerele în ordinea crescătoare a cifrelor lor. Explicați aşezarea numerelor.
   b) Un muncitor trebuie să taie două scânduri, una de 7 m şi una de 5 m, în bucăți de câte 1 m. Câte tăieturi va face muncitorul ? Explicați răspunsul.
2. Suma a trei numere este 68. Diferența primelor două este 5, iar al doilea număr împărțit la al treilea dă câtul 3. Să se afle numerele.
3. Nasul lui Pinocchio măsoară 2 cm. După ce spune o minciună el spune întotdeauna un adevăr. La fiecare minciună pe care o spune nasul creşte cu 2 cm iar la fiecare adevăr scade cu 1 cm. După câte minciuni şi câte adevăruri spuse, nasul lui Pinocchio va măsura 8 cm?

Clasa a IV-a

1. a) Se dau numerele: $\boldsymbol{x}$ = [(240:8+670):2x8-1699]:3+3
   $\boldsymbol{y}$ = [(116-56:8)x7-519]:4-6x9.
   Să se calculeze suma, diferența şi produsul numerelor x şi y.
   b) Trei copii au împreună 24 de ani. Câți ani vor avea împreună peste 5 ani?
2. Nouă jetoane numerotate de la 1 la 9 sunt aşezate cu fața în jos. După ce a luat 4 jetoane din cele 9, Dan îi spune lui Mihai : dacă iei şi tu 4 jetoane, la întâmplare, din cele rămase, atunci suma numerelor de pe ele este sigur pară. Care este suma numerelor de pe jetoanele lui Dan?
3. Suma a trei numere este mai mică decât 73, iar ultimul este cel mai mare. Suma ultimelor două numere este cu 20 mai mare decât suma dintre primul şi al treilea număr. Ştiind că suma primelor două numere este 40, să se afle al treilea număr.

Clasa a V-a

1. Se dau numerele: $x = 1^9+2^9+3^9+ \ldots. +2009^9$

   $y = 2009^1+ +2009^2+2009^3+ \ldots. +2009^9$.

   Stabiliți dacă produsul $x \cdot y$ este număr par sau impar.
2. Suma a trei numere naturale este 55. Dacă împărțim al doilea număr la primul se obține câtul 4 şi restul 2, iar dacă împărțim pe al treilea la al doilea obținem câtul 4 şi restul 3. Aflați numerele.
3. Fie mulțimile: $\boldsymbol{A}=\{a\in N \mid a=5n+2,\ n\in N\}$, $\boldsymbol{B}=\{a\in N \mid a=5n+3,\ n\in N\}$, $\boldsymbol{C}=\{a\in N \mid a= n^2,\ n\in N\}$
   a) Scrieți câte trei elemente pentru fiecare din mulțimile ***A***, ***B***, ***C***
   b) Arătați că suma $a+b$ este divizibilă cu 5, oricare ar fi a din ***A*** şi b din ***B***.
   c) Arătați că $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C}=\Phi$

Clasa a VI-a

1. a) Calculați $\mathbf{S}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+....+\frac{44}{947\cdot 991}$

   b) determinați numerele naturale x, y, z ştiind că expresia $\mathbf{E}=\frac{\overline{x,yz}+\overline{y,zx}+\overline{z,xy}}{0,37}$ este cel mai mic pătrat perfect nenul, iar y este media aritmetică a numerelor x şi y.
2. Se consideră unghiul AOB, iar semidreptele $[OM_1$, $[OM_2$, $[OM_3$, $[OM_4$ şi $[OM_5$ sunt bisectoarele unghiurilor AOB, M_1OB, M_2OB, M_3OB şi M_4OB respectiv. Dacă măsura unghiului M_2OM_5 este de $39^0 12'$ atunci:
   a) Aflați măsura unghiului AOB
   b) Aflați măsura unghiului BOC, [OC fiind semidreapta opusă semidreptei [OA.
3. Determinați toate perechile de numere naturale ***a*** şi ***b*** cu ***a***>***b*** ştiind că c.m.m.m.c. al lor este mai mare decât c.m.m.d.c. al lor cu 26.

Clasa a VII-a

1. a) Arătați că numărul $\sqrt{4^k\cdot 49+2^{2k+3}\cdot 11-2^{2k}\cdot 88}$ este natural, oricare ar fi $k\in N$.

b) Fie $a=\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+....\sqrt{200}$. Aflați cel mai mare număr întreg mai mic decât a.

2. Fie $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot....\cdot\frac{2007}{2008}$ şi $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot....\cdot\frac{2008}{2009}$

a) Arătați că $A\cdot B=\frac{1}{2009}$

b) $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$, oricare ar fi n număr natural

c) $A < B$

3. În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, se notează M şi N mijloacele bazelor, $M\in(AB)$, $N\in(CD)$, iar P şi Q sunt mijloacele diagonalelor DB, respectiv AC.

a) Arătați că MPNQ este paralelogram

b) Arătați că dreapta PQ este paralelă cu bazele trapezului.

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

1. Determinați perechile de numere întregi (x,y), care verifică relația: $|2x-1|+|y+1|=4$.

2. Fie [a,b] un interval de numere reale care conține exact 4 numere întregi.

a) Determinați cea mai mare valoare pe care o poate lua diferența b-a

b) Arătați că valoarea expresiei $E=2|a-b-2|+3|b-a-5|+$ $+\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ nu depinde de capetele intervalului.

SUBIECTUL II

1. Determinați numerele reale x, y, z, încât:

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+7}+\sqrt{y^2-2y\sqrt{5}+9}+\sqrt{z^2-2z\sqrt{7}+11}\le 6.$$

2. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2-4}{6x+4}:\left(\frac{x-1}{3x+2}+\frac{3-2x}{3x-2}-\frac{12-8x}{9x^2-4}\right)$,

$x\in R\setminus\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3},2\right\}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă
b) Determinați E(-4020)

SUBIECTUL III

1. Fie un triunghi ABC dreptunghic în A, cu lungimile laturilor AC=*b*, AB=*c* şi D mijlocul laturii (BC). Se ridică pe planul triunghiului perpendiculara AM încât distanța de la M la dreapta BC să fie $\frac{bc\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$ şi în planul triunghiului MBC se construiesc segmentele DP şi DQ, cu $P \in MB$ şi $Q \in MC$, încât $\angle BDP \equiv \angle PDM$ şi $DP \perp DQ$.
   a) Determinați unghiul diedru al planelor (MBC) şi (ABC)
   b) Determinați distanța de la punctul A la planul (MBC)
   c) Arătați că $PQ \parallel (ABC)$.

<u>Subiect echipaje</u>

Clasa a V-a

1. Un număr de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 97, iar diferența dintre cifra sutelor şi cifra unităților este 5. Să se afle numărul.

2. Determinați mulțimile A şi B ştiind că:
   $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$
   $A \cap B=\{1,2\}$
   $A \cap \{3,4\}= \Phi$
   $B \cap \{5,6\}= \Phi$

Clasa a VI-a

1. Demonstrați că numărul $\overline{2009ab}$ se divide cu 37 dacă şi numai dacă $\overline{ab2009}$ se divide cu 37.

2. Punctele M_0, M_1, M_2, …. , M_9, M_{10} sunt situate pe dreapta d, astfel încât $[M_1M_2]$ este dublul lui $[M_0M_1]$, $[M_2M_3]$ este dublul lui $[M_1M_2]$ ş.a.m.d. $[M_9M_{10}]$ este dublul lui $[M_8M_9]$. Ştiind că lungimea segmentului $[M_0M_{10}]$ este egală cu $(2^{11}-2)$ mm, aflați lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor $[M_0M_1]$ şi $[M_9M_{10}]$.

Clasa a VII-a

1. Arătaţi că $\sqrt{1+3+5+....+2009} \in Q$ şi $\sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot .... \cdot 2009} \notin Q$.

2. Fie paralelogramul ABCD cu AB=2AD şi M mijlocul lui DC.
   a) Arătaţi că (AM este bisectoarea unghiului DAB
   b) Ştiind că P este simetricul lui M faţă de mijlocul lui AB, arătaţi că AMBP este dreptunghi.

Clasa a VIII-a

1. Fie *x* şi *y* numere reale, iar a=$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.
   Arătaţi că, dacă x-3y+1=0 şi $x \in [-1,2]$, atunci $a=\sqrt{10}$.

2. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara MA, MA=12cm, aşa încât unghiul planelor (MBC) şi (ABC) este de 30^0, iar unghiul planelor (MCD) şi (ABC) este de 60^0.Să se afle:
   a) AB şi BC
   b) d(M,BD) şi d(A,(MBD))
   c) tangenta unghiului planelor (MBD) şi (ABCD).

EDIȚIA a VIII-a
1 februarie 2008

CLASA a III-a

1. a) Cum poate fi exprimat numărul 1000 folosind de opt ori cifra 8 şi operația de adunare?
   b) Descoperă regula şi completează numărul care lipseşte:

35	83	141	123
15	24	4	?

2. Maria, Ioana şi Andrei au împreună 21 de ani. Ştiind că Măria şi Ioana sunt gemene, iar Andrei are 11 ani, aflați:
   a) Vârsta Măriei;
   b) Cu câți ani în urmă Andrei avea vârsta egală cu dublul sumei vârstelor fetelor?
3. Într-o cameră sunt trei mame, şase fiice, o bunică, patru nepoate, patru verişoare şi trei perechi de surori. Care este numărul minim de scaune care trebuie aduse pentru acestea?

CLASA a IV - a

1) Florin are trei albume cu fotografii. În primul album are cu 167 de fotografii mai mult decât în celelalte două la un loc. În albumul al doilea are de trei ori mai multe fotografii decât în al treilea album. El observă că, dacă ar mai avea încă 17 fotografii în primul album, ar avea de trei ori mai multe fotografii decât în celelalte două la un loc. Câte fotografii are Florin în fiecare album?
2) 7 copii au vârstele de 3 ani, 5 ani, 7 ani, 9 ani, 10 ani, 13 ani, 15 ani. 6 dintre ei se aşează la o masă rotundă astfel încât suma vârstelor oricăror doi copii de la masă să fie un număr par. Care copil nu se poate aşeza la masă?
3) În laboratorul de informatică sunt mese şi pe fiecare masă se află acelaşi număr de calculatoare. Dacă se aşează câte doi elevi la o masă, rămân 9 elevi în picioare. Dacă se aşează câte 4 elevi la o masă, două mese rămân libere, iar o masă este ocupată de atâția elevi câte calculatoare sunt pe acea masă. Câți elevi sunt, câte mese sunt în laborator şi câte calculatoare sunt pe o masă?

Clasa a V-a

1) Fie mulțimele: $A = \{x \in \mathbf{N} / x = 3^n, n \leq 3, n \in \mathbf{N}\}$
$B = \{y \in \mathbf{N} / y = x - 3, x \in \mathbf{A}\}$
$C = \{z \in \mathbf{N}^* / z = y^2, y \in \mathbf{B}\}$
a) Aflați elementele mulțimilor A, B, C.
b) Calculați $(A \cup B) \cup C$ şi $C \setminus (A \cap B)$
2) Fie $n \in \mathbf{N}^*$.Numărul n^2+n se împarte la 2008 obținându-se câtul C şi restul R. Să se demonstreze că R este număr par.
3) 4 echere, 7 compasuri şi 6 raportoare costă 65 lei; 7 echere, 4 compasuri şi 5 raportoare costă 67 lei, iar 1 echer, 1 compas şi 15 raportoare costă 68 lei. Cât costă un echer, un compas şi un raportor?

Clasa a VI-a

1) a) Prin împărțirea numerelor $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ la acelaşi număr n se obțin câturile b, c respectiv a şi resturile c, a respectiv b. Aflați n.
b) Determinați toate numerele naturale $\overline{ab}$, a < b dacă $\overline{a,(ba)} + \overline{b,(ab)} \in \mathbf{N}$
2) Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât b reprezintă 150% din a şi totodată 60% din c.
a) Determinați a, b, c ştiind că $a^2 + b^2 + c^2 = 152$.
b) Aflați numărul natural minim n pentru care $n \cdot (7a^2 + 8b^2 + 9c^2)$ este pătrat perfect.
3) Se dau unghiurile BAC şi BAD neadiacente astfel încât 4·m(CAD)= m(BAD). Dacă (AM este bisectoarea unghiului BAC, (AE semidreapta opusă ei şi m(DAE) este cu 10^0 mai mare decât suplementul unghiului BAC, calculați m(BAC), m(BAE).

Clasa a VII-a

1) a) Să se determine x, y, z aşa încât numărul $\boldsymbol{A} = \overline{0,xy(z)} + \overline{0,yz(x)} + \overline{0,zx(y)}$ să fie număr natural, unde x, y, z sunt cifre consecutive, în această ordine.
b) Fie $\boldsymbol{B} = 6^{2007} + 6^{2006} + 6^{2005} + \ldots.. + 6^3 + 6^2 + 6^1 + 6^0$. Să se arate că $\sqrt{5B+1} \in N$.
2) În anul 2007, producția unei firme de telefonie mobilă a fost de n telefoane. În fiecare din anii următori producția va creşte cu 20% față de producția din anul precedent. În ce an firma va produce mai mult decât $2n$ telefoane?

3) Fie ABCD un dreptunghi în care $AC \cap BD = \{0\}$ iar M mijlocul laturii [AB]. Notăm $DM \cap AC = \{E\}$ şi $CM \cap BD = \{F\}$. Arătați că:
   a) $EF \parallel CD$
   b) $AB = 3EF$
   c) Aflați raportul dintre aria triunghiului ADE şi aria dreptunghiului ABCD.

CLASA a VIII-a

1. Fie $E(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}} + \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}}, x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.
   a) Arătați că $E\left(\frac{n^2+1}{4}\right) = n$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$;
   b) Arătați că $2(1+2+...+1003) + \frac{1}{2} = \frac{(2n+1)^2+1}{4}$ şi $E\left(2(1+2+...+1003) + \frac{1}{2}\right) = 2007$;
   c) Notând $\sqrt{4x-1} = y$, arătați că $x + \frac{1}{2}\sqrt{4x-1} = \frac{(1+y)^2}{4}$;
   d) Verificați $E\left(\frac{1}{4}\right) = E\left(\frac{1}{2}\right)$ şi arătați că pentru orice $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, $E(x) = 1$.
2. În fiecare pătrățel al unei table de şah se scrie câte un număr natural astfel încât fiecare număr scris să se repete exact de atâtea ori cât este el şi pe primul rând de pătrățele să apară scrise strict crescător toate numerele folosite.
   a) Calculați suma numerelor de pe prima linie;
   b) Determinați cel mai mare număr posibil de scris pe prima linie;
   c) Arătați că există o singură alegere în care produsul numerelor de pe primul rând este impar.
3. În mijlocul D al ipotenuzei BC al triunghiului *dreptunghic şi neisoscel ABC* se ridică *pe planul triunghiului* perpendiculara $DS \geq AD$. Fie $M \in [AB]$ şi $N \in [AC]$ mijloacele acestor segmente. Arătați că:
   a) triunghiul *SMN* <u>*nu este isoscel*</u>;
   b) dreptele *AS* şi *BC* <u>*nu sunt perpendiculare*</u>;
   c) măsura unghiului $\angle MSN$ <u>*nu este 60^0*</u>.

PROBA PE ECHIPAJE

CLASA a V-a

1) Fie tabloul:

			1			
	1	2	1			
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1

………………………………………………..

1 …..………… 2007 2008 2007 …..........……..... 1

Calculați suma elementelor de pe coloana principală.

a) De câte ori apare numărul 1001 în acest tablou?
b) Calculați suma elementelor de pe linia 1000.

2) O clădire având 72 de etaje este dotată cu un lift special. Dacă se apasă butonul galben liftul se ridică cu 7 etaje, iar dacă se apasă butonul verde liftul coboară cu 9 etaje (dacă una dintre aceste comenzi este greşită liftul rămâne pe loc). Putem să ajungem de la etajul 1 la etajul 72 cu ajutorul acestui lift? (justificați)

CLASA a VI a

1. Dacă $a = 48^n - 8^n - 6^n + 1$, $n \in \mathbf{N}$, arătați că 35 divide a.
2. În jurul unui punct sunt date unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, şi $\angle DOA$, astfel încât măsurile unghiurilor $\angle AOB$, şi $\angle COD$, sunt invers proporționale cu 3 şi $\frac{8}{5}$ iar măsurille unghiurilor $\angle AOB$ şi $\angle DOA$, sunt direct proporționale cu 2,5 şi 25. Dacă unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, şi $\angle COD$ are măsura de 108^0, aflați măsurile celor patru unghiuri.

CLASA a VII a

1. În patrulaterul *ABCD*, $[AD] \equiv [BC]$ şi $[AB] \equiv [CD]$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $OM \parallel BC$, $M \in [AB]$ şi $E \in [AC]$ astfel încât $AC = 4 \cdot AE$. Notăm $BE \cap OM = \{F\}$, respectiv $AF \cap BC = \{G\}$.
   a) Arătați că *ABCD* este paralelogram.
   b) Este *ODEM* trapez ? Justificați răspunsul.
   c) Aflați valoarea raportului $\frac{BG}{BC}$

2. a) Fie $a,b,c \in Z^*$ astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$. Arătați că $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c} \in Z$.

b) Calculați $\sqrt{2008+2+4+6+...+4014}$.

<u>CLASA a VIII a</u>

1. Fie $E = \overline{\underbrace{99...9}_{2008\,cifre}}$.

a) Calculați $E + 1$ şi $E - 1$;

b) Aflați numărul desemnat de ultimele 4 cifre din rezultatul operației E^2+2007;

c) Determinați suma cifrelor rezultatului operației E^2.

2. Un corp de mobilier în formă de paralelipiped dreptunghic $[ABCDA'B'C'D']$ are dimensiunile $AB=1m$, $BC=4m$ şi $AA'=2m$. O furnică şi o muscă pleacă din interior din A şi, neîntâlnind obstacole, ajung în C', fiecare pe cel mai scurt drum posibil. Determinați:

d) lungimea drumului parcurs de muscă;

a) lungimea drumului parcurs de furnică;

EDIȚIA a VII-a

3 februarie 2007

CLASA a III - a

1) Un şir de numere pare, consecutive, are suma dintre primul şi ultimul număr 26, iar suma ultimelor două numere este 38. Găsiți termenii şirului.
2) Vlad are pe card o sumă de bani de două ori mai mare decât Diana. Ce sumă avea fiecare la început dacă, după ce Vlad şi-a mai adăugat 13 lei, iar Diana 31 lei, aveau sume egale?
3) Un cârd de gâşte, lung de 10 m, trece un podeț de 10 m, cu o viteză de 10 m pe minut. Cât timp durează până ce cârdul parcurge podețul? Justificați răspunsul.

CLASA a IV - a

1) Fie trei numere naturale a, b şi c. La împărțirea dintre b şi a se obține câtul 3, iar la împărțirea lui b la c se obține câtul 1 şi restul 1. Aflați numerele ştiind că diferența dintre cel de-al treilea număr şi primul este 19.
2) În vacanța de iarnă, Bianca a citit trei cărți. Prima carte are un număr de pagini egal cu jumătate din numărul paginilor celei de-a doua cărți, iar a treia carte are cu 16 pagini mai multe decât un sfert din a doua carte, dar şi cu 56 pagini mai puțin decât a doua carte. Câte pagini a citit Bianca în vacanță?
3) Într-un seif sunt 3 sertare, în fiecare sertar sunt 3 cutii, iar în fiecare cutie sunt 3 monede de aur. Seiful, sertarele şi cutiile sunt închise fiecare cu lacăt. Câte lacăte trebuie deschise pentru a putea lua 22 de monede?

CLASA a V - a

1) Fie $a = \left(2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7 - 61\right)^{63}$ şi

   $b = \left(2^{2^5} : 2^{5^2} - 5^3\right)^{42}$.

   a) Să se afle numerele a şi b;
   b) Comparați numerele a şi b.

2) Să se afle numărul natural de forma $\overline{abc}$ în baza 10 care împărțit la 6 dă câtul $\overline{bc}$ şi restul a.
3) Fie A = $\{5n+3 \mid n \in N\}$ şi B = $\{3m+2 \mid m \in N\}$.
   a) În care dintre cele două mulțimi se află numărul 2006? Dar 2008? Justificați răspunsul.
   b) Arătați că mulțimea A nu conține pătrate perfecte.
   c) Calculați suma tuturor numerelor de 2 cifre din mulțimea B.
   d) Scrieți forma generală a unui element din mulțimea A $\cap$ B.

CLASA a VI - a

1) Fie numerele: A = 235 + 2 + 4 + 6 + 8 + … + 468

$$B = \frac{5^{n+1}}{5} + \frac{25^{n+1}}{5^{n+1}} + \frac{125^{n+1}}{5^{2n+1}}$$

   a) Arătați că A este pătrat perfect;
   b) Arătați că B este divizibil cu 31;
   c) Aflǎ n$\in N$ ştiind că B = 155

2) Numărul elevilor unei şcoli este cuprins între 1400 şi 1600. Dacă sunt grupați câte 7 rămân 4 elevi; dacă sunt grupați câte 8 rămân 5 elevi; dacă sunt grupați câte 9 rămân 6 elevi. Câți elevi are şcoala?

3) Fie 6 unghiuri în jurul unui punct O notate $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$, $F\hat{O}A$ astfel încât m($B\hat{O}C$) = 2m($A\hat{O}B$); m($C\hat{O}D$)==2m($B\hat{O}C$); m($D\hat{O}E$) = 2m($C\hat{O}D$); m($E\hat{O}F$) = 2m($D\hat{O}E$) şi m($F\hat{O}A$) = 50°.
   a) Aflați măsurile celorlalte 5 unghiuri;
   b) Arătați că (OB este bisectoarea unghiului ($D\hat{O}F$);
   c) Dacă OM $\perp$ OE şi [OM interioară unghiului ($C\hat{O}D$), calculează măsura unghiului ($D\hat{O}M$)

CLASA a VII-a

1) Să se determine x, y şi z ştiind că: $x-y=\frac{y+z}{4}=\frac{z}{2}$ şi $x+2z=14$.

2) a) Arătați ca $\sqrt{2^{2n}\cdot 9^{n+1}+4^{n+2}\cdot 3^{2n}}\in N$ unde $n\in N$.

b) Fie a, m, n numere naturale nenule. Dacă $\frac{m-0,(3)}{n}=0,(6)$, atunci $\frac{ma+2}{na+3}$ este fractie ireductibilă.

3) Fie punctul O intersectia diagonalelor trapezului ABCD, AB || CD şi punctele $E\in(AD)$ şi $F\in(BC)$, astfel incat EF || AB şi $O\notin EF$.

a) Dacă EF intersecteaza AC şi BD in punctele P, respectiv Q, atunci EP=FQ.

b) Dacă EO=FO, arătați ca trapezul ABCD este isoscel.

CLASA a VIII a

1) Fie a şi b numere reale strict pozitive şi x_n solutia ecuatiei $\left(\sqrt{b}\right)^n\cdot(x-a)=\left(\sqrt{a}\right)^n\cdot(b-x)$.

Demonstrați ca max $\{x_n | n\in\{0,1,2\}\}\le\frac{a^2+ab+2b^2}{a+3b}$.

2) a) Determinați $n\in N, n\ge 2$ pentru care

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+......+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=9$$

b) Arătați ca $\frac{1}{\sqrt{(k-1)k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}$, $(\forall)k\ge 2, k\in N$;

c) Determinați $n\in N, n\ge 2$ pentru care

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)}+....+\frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}=\frac{4}{5}$$

3) Fie rombul ABCD cu $m(\prec A)<90^0$. Prin varful A se duce un plan α paralel cu diagonala BD.

a) Arătați ca proiectia rombului pe planul α este tot un romb;

b) Determinati pozitia planului α astfel incat proiectia rombului sa fie un patrat.

PROBA PE ECHIPAJE

CLASA a V - a

1. Un piţigoi a vizitat 50 de crengi de copac. Pe prima creangă a ciripit o dată, pe a doua de două ori, …, pe a 50-a creangă a ciripit de 50 de ori. Piţigoiul răguşeşte dacă ciripeşte de 999 ori. a) A răguşit piţigoiul în acea zi? b) De câte ori a ciripit răguşit pe creanga pe care a răguşit?
2. Într-o cofetărie sunt 45 de prăjituri: cu cireşe, cu caise şi frişcă şi numai cu frişcă. Ştiind că 29 de prăjituri sunt cu fructe şi 31 conţin frişcă, stabiliţi câte prăjituri de fiecare fel sunt în cofetărie.

CLASA a VI - a

1. Determinaţi numărul **x** ştiind că:
$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+...+\frac{x+100}{101}=100.$$
2. Fie punctele coliniare A_0, A_1, A_2, … A_n situate pe dreapta *d* în această ordine, astfel încât: A_0A_1= 1 cm, A_1A_2= 2 cm, ..., $A_{n-1}A_n$=n cm.
   a. Aflaţi lungimea segmentului [$A_{44}A_{99}$], precum şi distanţa dintre punctele A_0 şi M, unde M este mijlocul segmentului [$A_{44}A_{99}$];
   b. Aflaţi n dacă lungimea segmentului [A_0A_n] este egală cu 861 cm.

CLASA a VII -a

1) a) Scrieti numarul 36^{2008} ca o sumă de trei cuburi.
   b) Determinati cardinalul mulţimii:
$$\left\{a \;\middle|\; a=\frac{x^2+4}{x+2},\ x\in Z-\{-2\},\ a\in Z\right\}$$
2) În triunghiul ABC, punctul N este mijlocul medianei [AM]. Dacă $\{D\}=AC\cap BN$ şi $BN=3cm$, sa se calculeze lungimea segmentului [ND].

CLASA a VIII-a

1) Fie $a,b\in(0,\infty)$. Arătaţi ca: a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$
   b) Dacă $a^3+b^3=2ab$, atunci $a^2+b^2\leq 1+ab$
2) Se considera punctele necoplanare A, B, C, D. Arătaţi ca, dacă $\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AC}+\frac{AD}{BD}+\frac{BD}{AD}=4$, atunci $AB\perp CD$.

EDIȚIA a VI-a
14 aprilie 2006

Clasa a III-a

I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Copiați exercițiul $880 - 661 - 631 - 412$
și adăugați paranteze pentru a obține rezultatul 0.

(10 puncte)

I.2. Numerele pare de forma $\overline{a3b}$, care au suma cifrelor 12, sunt ……

(10 puncte)

I.3. Numărul care adunat cu jumătatea sa, cu sfertul său şi rezultatul înmulțit cu 2 dă 350, este ......

(10 puncte)

I.4. Câte numere x verifică relația: $12 < 2x + 1 < 22$?

(10 puncte)

I.5. Nasul lui Pinocchio măsoară 4 cm. El se dublează de câte ori minte.
Cât va măsura nasul după ce Pinocchio va spune 5 minciuni?

(10 puncte)

II: Trece pe foaia de concurs rezolvarea completă:

Cinci băieți aveau acelaşi număr de mere. După ce fiecare a mâncat câte 12 mere, le-au rămas laolaltă atâtea mere câte a avut fiecare dintre ei la început. Câte mere a avut fiecare?

(20 puncte)

III: Trece pe foaia de concurs rezolvarea completă:

Triplul lui 8 mărit cu produsul numerelor 6 şi 4 dă un număr care reprezintă produsul a două numere naturale.

Aflați numerele. Găsiți toate variantele.

(20 puncte)

Clasa a IV-a

1. Când aveam eu 12 ani, fratele meu avea 2 ani. Acum avem împreună 56 de ani. Câți ani avem fiecare?

(25 uncte)

2. În care lună a anului, dacă adunăm numerele care reprezintă data ultimelor cinci zile din lună, obținem numărul 135?

(25 uncte)

3. Împărțiți numerele 1, 2, 3, ..., 40 în două grupe cu acelaşi număr de numere, aşa încât ambele grupe să aibă suma numerelor aceeaşi.

(20 uncte)

4. Diferența dintre înălțimea (în cm) şi greutatea (în kg) Dolofanului este 100. Ştiind că aceeaşi relație are loc şi în cazul lui Schijă, iar dublul înălțimii Dolofanului este egal cu triplul înălțimii lui Schijă şi că greutatea Dolofanului este de patru ori mai mare decât greutatea lui Schijă, să se afle înălțimea lui Schijă şi greutatea Dolofanului.

(20 puncte)

Clasa a V-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Numărul multiplilor lui 2006, mai mici ca 2006, este ……..

(5 puncte)

I.2. Ultimele trei cifre ale numărului $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\ldots\cdot27+19$ sunt ……..

(5 puncte)

I.3. Valoarea de adevăr a propoziției: "Numărul $16^{n+1}\cdot25^{n+2}+9^{2n+1}+4$, unde $n\in\mathbb{N}$, este pătrat perfect", este ……..

(5 puncte)

I.4. Numărul: $\left(\frac{7}{9}+\frac{77}{99}+\frac{777}{999}\right):\frac{7}{9}-\frac{111}{700}:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{70}+\frac{1}{700}\right)$ este egal cu ......

(5 puncte)

I.5. Rezultatul calculului:
$2006^{1+2+3+\ldots+2006}\cdot\{[(2006^{2006})^{2006}:2006^{20062006}]^{0}\cdot2006-2006\}:2006$ este …….

(5 puncte)

I.6. Numărul natural care, împărțit la un număr de o singură cifră, dă restul 8 şi câtul 13 este …….

(5 puncte)

I.7. Numărul de forma $\overline{ab}$, cu $a<b$, care adunat cu răsturnatul său dă suma 176 este …….

(5 puncte)

I.8. Dintre numerele 2^{145} şi 3^{87} mai mare este numărul ……

(5 puncte)

I.9. Numărul natural **x**, pentru care mulțimile $A=\{2\mathbf{x}-19, \mathbf{x}+23, 2\mathbf{x}+26\}$ şi $B=\{3\mathbf{x}+1, \mathbf{x}+6, 2\mathbf{x}-2\}$ sunt egale, este …….

(5 puncte)

I.10. Suma numerelor naturale ***n***, care verifică relația $\frac{2}{7} \le \frac{n}{21} < \frac{1}{2}$ este ...

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Fie **a** un număr natural. Împărțind 623 la **a** se obține un rest mai mic cu 2**a** decât 218.

a) Arătați că $\mathbf{a} \ge 73$;

b) Arătați că **a** divide 405;

c) Dacă, în plus, **a** este un pătrat perfect mai mic decât 150, aflați **a**.

(20 puncte)

II.2. a) Arătați că fracția $F = \frac{3^1 + 3^3 + 3^5 + ... + 3^{155}}{455}$ este reductibilă.

b) Arătați că fracția F este număr natural.

(20 puncte)

Clasa a VI-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ şi $\frac{c}{d} = \frac{9}{14}$, atunci $\frac{3ac - bd}{4bd - 7ac}$ este ……..

(5 puncte)

I.2. Triunghiul ABC cu bisectoarea [CD a unghiului C, D∈(AB), iar E este un punct astfel încât B∈(AE). Dacă $m(\widehat{ECA})=104^o$ şi $m(\widehat{ECB})=40^o$, atunci $m(\widehat{ECD})=$ ……..

(5 puncte)

I.3. Un dicționar costă 250 lei. După o scumpire cu 15%, dicționarul costă ……..

(5 puncte)

I.4. Media aritmetică a numerelor 20 şi 30% din 20 este ……..

(5 puncte)

I.5. Valorile lui x∈N pentru care fracția $\frac{7}{x-9}$ este supraunitară sunt ...

(5 puncte)

I.6. Suplementul unui unghi are măsura de $130^o42'18''$. Complementul său are măsura de ……..

(5 puncte)

I.7. Numerele x, y, z sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 şi 4 şi 2x+y+5z = 81, atunci: x = ……, y = ……, z = ……

(5 puncte)

I.8. Din 15m de stofă se confecționează 6 costume. Pentru a confecționa 10 costume sunt necesari …… metri de stofă.

(5 puncte)

I.9. Fie punctele A,B,C,D coliniare astfel încât: $B\in(AC)$, $C\in(BD)$, AB = 3cm, BC = 2cm, CD = 9cm. Fie M mijlocul segmentului AC şi N mijlocul segmentului CD. Segmentele: [AC], [AD], [BD] şi [MN] au lungimile ……..

(5 puncte)

I.10. Dintr-o cantitate de aur se realizează 20 de inele având fiecare 1,5 grame. Din aceeaşi cantitate se pot realiza un număr de …… inele cu greutatea de 2 grame fiecare.

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Fie unghiul AOB un unghi drept şi d o dreaptă care trece prin O şi nu are puncte în interiorul unghiului AOB. Fie $C\in d$ situat în semiplanul determinat de dreapta OB şi punctul A, iar $D\in d$ astfel ca (OC şi (OD să fie semidrepte opuse.

a) Demonstrați că unghiul AOC este ascuțit;

b) Dacă $M\in \text{int}(\hat{AOB})$ astfel încât $\hat{AOC}\equiv\hat{AOM}$, demonstrați că [OB este bisectoarea unghiului MOD.

(20 puncte)

II.2. Fie a = x(x-1)(x-2)…(x-1998) şi $b\in N\setminus\{0\}$. Aflați valorile lui x pentru care: $\frac{a+b}{a+3b}=\frac{a+2b}{a+6b}$.

(20 puncte)

Clasa a VII-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Fie E(x) = 4[x(x-5)+7]. Valoarea minimă a expresiei E(x) este …

(5 puncte)

I.2. Fie numărul $a=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

Valoarea lui $\left(a+2\sqrt{3}\right)^{2006}$ este ……..

(5 puncte)

I.3. Fie ABCD un trapez cu bazele AB = 5 cm, CD = 3 cm şi $AC \cap BD = \{0\}$. Ştiind că $A_{DOC} = 18\ cm^2$ atunci $A_{AOB} =$ ……..

(5 puncte)

I.4. Într-o urnă sunt 2006 bile numerotate de la 1 la 2006. Probabilitatea ca, prin extragerea unei bile, să obţinem câtul egal cu restul la împărţirea numărului scris pe bilă la 11 este ……..

(5 puncte)

I.5. Fie mulţimea $M_n = \left\{x \in Z \middle| x^2 = 2^n, n \in N\right\}$.

Numărul elementelor mulţimii $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{2005}$ este …..

(5 puncte)

I.6. Cel mai mare număr întreg mai mic decât *x*, unde $x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ este …….

(5 puncte)

I.7. În ΔABC, AD şi BE sunt înălţimi, unde $D \in BC$ şi $E \in AC$. Fie $BC = 2a\sqrt{3}$ şi $AC = 3a\sqrt{2}$, $a > 0$. Valoarea raportului $\dfrac{AD}{BE}$ este egală cu …….

(5 puncte)

I.8. În ΔABC, BC = 10cm iar medianele BB' şi CC' au lungimile de 9cm, respectiv 12cm. Lungimea medianei $AA' =$ ……

(5 puncte)

I.9. Într-un trapez dreptunghic cu diagonalele perpendiculare, lungimile bazelor sunt $\left(5\sqrt{2}+1\right)$cm şi $\left(5\sqrt{2}-1\right)$cm. Lungimea înălţimii trapezului este de …….

(5 puncte)

I.10. Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălţimii este de 6cm iar raportul lungimilor segmentelor determinate de ea pe ipotenuză este $\dfrac{1}{3}$. Perimetrul triunghiului este …….

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. a) Să se arate că oricare ar fi numărul real a > 0, $a+\frac{1}{a}\geq 2$;

b) Dacă a, b, c, d > 0, atunci:

$$\frac{a+b+c}{d}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{b+c+d}{a}\geq 12.$$

(20 puncte)

II.2. Fie D piciorul bisectoarei din A a ΔABC şi ED||AB, E∈(AC). Se cere să se demonstreze că $\frac{1}{ED}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

(20 puncte)

Clasa a VIII-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Fie d un divizor comun al numerelor 1400 şi 600. Probabilitatea ca d să fie pătrat perfect este ……

(5 puncte)

I.2. Media geometrică a numerelor $2-\sqrt{3}$ şi $2+\sqrt{3}$ este ……..

(5 puncte)

I.3. Numerele reale x, y pentru care este îndeplinită egalitatea: $x^2+3y^2-4x+2\sqrt{3}y+5=0$ sunt ……..

(5 puncte)

I.4. Dacă $0<x<1$, $x+\frac{1}{x}=7$ atunci $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ este ……..

(5 puncte)

I.5. Cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea $2\left(x+\sqrt{5}\right)<4+x\sqrt{5}$ este.….

(5 puncte)

I.6. Se dă pătratul ABCD de latură 3cm. VD⊥(ABC), VD=5cm, atunci cosinusul unghiului $\left((ABC),(VAB)\right)$ este …….

(5 puncte)

I.7. Fie cubul ABCDA'B'C'D', M mijlocul segmentului (AD), N mijlocul segmentului (BC), aria triunghiului A'MN este $2\sqrt{5}$, atunci muchia cubului este ....

(5 puncte)

I.8. Fie rombul ABCD cu latura de 6cm, $m(\hat{A}) = 60^\circ$. Pe planul rombului se ridică perpendiculara MA de 3cm. Atunci d(M,BC)=...

(5 puncte)

I.9. Fie trapezul ABCD, AB || DC, $AC \cap BD = \{O\}$, $A_{AOB}=2cm^2$, $A_{DOC} = 8cm^2$, înălțimea trapezului are 6cm, atunci media geometrică a înălțimilor ΔAOB şi ΔDOC este ....

(5 puncte)

I.10. O prismă triunghiulară regulată ABCA'B'C' are AB = 2cm, $AA'=2\sqrt{2}$ cm. Fie P şi Q mijloacele muchiilor (AB) respectiv (AC). Notăm $A'P \cap BB' = \{M\}$, $A'Q \cap CC' = \{N\}$, atunci $A_{A'MN}$ este egală cu ....

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Fie funcția f:R→R, f(x) = **a**x+**b**:

a) Determinați **a** şi **b** ştiind că graficul funcției trece prin punctul de coordonate (1,0) şi face cu axa OX un unghi de 45°;

b) Pentru **a** = 1 şi **b** = -1 arătați că numărul f(1982)·f(1983)·f(1984)· f(1985)+1 este pătrat perfect.

c) Pentru **a** = 1 şi **b** = -1 calculați valoarea expresiei:

$$\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+\frac{1}{f(4)\cdot f(5)}+...+\frac{1}{f(2006)\cdot f(2007)}$$

(20 puncte)

II.2. Se dă piramida triunghiulară regulată VABC în care raza cercului circumscris bazei este $2\sqrt{3}$ şi muchia laterală $4\sqrt{3}$. Calculați:

a) aria laterală şi volumul piramidei;

b) $d(A,(VBC))$;

c) Fie $M \in (VA)$. Să se găsească poziția lui M astfel încât aria ΔMBC să fie minimă.

(20 puncte)

Proba pe echipaje

Clasa a V-a

3. Fie două numere naturale **a** şi **b** cu $\mathbf{b} \neq 0$. Prin împărțirea lui **a** la **b** se obține câtul 5 şi restul 27.
   a) Calculați 3**a**-15**b**+10;
   b) Dacă **a-b** < 143, calculează **a** şi **b**.

(10 puncte)

4. Dacă aşezăm 5 flori într-o vază, ar mai fi nevoie de 5 vaze. Dacă am aşeza câte 7 flori într-o vază, ar rămâne o vază cu 3 flori şi 3 vaze goale. Aflați numărul de flori şi numărul de vaze.

(10 puncte)

Clasa a VI-a

1. Fie $n \in N^*$. Arătați că $\dfrac{5 \cdot 10^{n+1} - 3 \cdot 10^{n} - 11}{9} = 5\underbrace{222......2}_{n-1 \text{cifre}}1$.

(10 puncte)

2. În ΔABC dreptunghic în B, fie (AD bisectoarea $\angle A$ ($D \in [BC]$). Perpendiculara DM dusă în D pe ipotenuză ($M \in [AC]$) taie prelungirea catetei AB în E. să se arate că ΔDEC este isoscel.

(10 puncte)

Clasa a VII-a

1. Aflați cifrele x,y astfel încât: $\sqrt{\overline{0,xx(y)} + \overline{o,yy(x)}} \in Q$.

(10 puncte)

2. Într-un patrulater ABCD laturile opuse AB, CD se întâlnesc în P şi sunt perpendiculare. Să se demonstreze că suma pătratelor celorlalte două laturi este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

(10 puncte)

Clasa a VIII-a

1. a) Determinați elementele mulțimii $A = \{(x, y) \in Z \times Z \mid x + y + xy = 1\}$.

   b) Dacă elementele mulțimii A reprezintă coordonatele unor puncte, reprezentați-le într-un sistem de coordonate şi calculați aria patrulaterului convex cu vârfurile în aceste puncte.

(10 puncte)

2. În cubul ABCDA'B'C'D', punctul O este centrul feței ABCD şi OM = d(O,BD') = $\frac{8\sqrt{6}}{3}$. Fie P$\in$(AA'), PA = 7PA'. Aflați:

a) muchia cubului;
b) aria totală şi volumul cubului;
c) distanța d(P,(B'BD'));
d) cosinusul unghiului $((PBD),(BCD))$.

(10 puncte)

EDIȚIA a V-a
2 aprilie 2005

Clasa a III-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Dublul rezultatului exercițiului (1+2+3+4+5):3+(6+7+8+9+10):8 este …..

(10 puncte)

I.2. Dintre numerele 24; 9; 8; 40; 64; 1, alege pe acelea care se pot scrie ca un produs de trei numere egale.

(10 puncte)

I.3. Andrei este mai mare decât Mihai, Mihai este mai mare decât Mihaela, Ioana este mai mare decât Andrei şi mai mică decât Maria. Cel mai mare copil este ..….

(10 puncte)

I.4. Descoperă regula şi completează ultimul jeton:

24	63	97	74
8	18	63	

(10 puncte)

I.5. Într-o curte erau 128 păsări: găini, gâşte, rațe şi curci. Câte păsări erau de fiecare fel, dacă în curte se găseau 86 găini şi gâşte, 77 găini şi rațe, 83 găini şi curci ?

(10 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Dan şi Răzvan aveau câte 48 de nuci. Dan mănâncă un număr de nuci egal cu suma cifrelor numărului său de nuci. Răzvan a mâncat cu 24 nuci mai puține decât restul nucilor. Care copil a mâncat mai multe nuci? De câte ori? Câte nuci au acum cei doi copii împreună?

(20 puncte)

II.2. Scrie toate valorile pe care le pot primi numerele $\boldsymbol{a}$ şi $\boldsymbol{b}$, astfel încât egalitatea $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = 11$ să fie adevărată.

(20 puncte)

Clasa a IV-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Observă regula şi completează şirul: 2 9 31 98 300.

(10 puncte)

I.2. Nuferii care cresc pe un lac îşi dublează suprafaţa în fiecare zi. Dacă în 20 de zile acoperă în întregime lacul, nuferii acoperă jumătate din suprafaţa lacului în …… zile.

(10 puncte)

I.3. Produsul a două numere este 126. Dacă se măreşte primul număr cu 5, produsul devine 161. Cele două numere sunt ..….; …… .

(10 puncte)

I.4. Pentru numerotarea paginilor unei cărţi s-au folosit 330 cifre. Cartea are …… pagini.

(10 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. La un concurs de matematică, elevii clasei a IV-a au avut de rezolvat 8 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect li s-au acordat 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit li s-au scăzut 2 puncte.
Câte probleme au rezolvat corect deţinătorii premiului întâi, doi şi trei, dacă ei au obţinut respectiv 68, 56 şi 44 puncte ?

(20 puncte)

II.2. Suma a cinci numere naturale este 48. aflaţi numerele ştiind că primul număr este egal cu suma ultimelor trei, al doilea este dublul primului, al treilea număr este o pătrime din al doilea, al patrulea este o treime din primul, iar ultimul este de 6 ori mai mic decât suma ultimelor 3.

(20 puncte)

II.3. Într-o cutie sunt 35 kg de cuie. Cum se poate, cu ajutorul unei balanţe cu două talere şi cu o greutate de 1 kg, prin două cântăriri, să măsurăm 26 kg de cuie ?

(10 puncte)

Clasa a V-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Rezultatul calculului: $2^5 : 2^2 + \left[600 : \left(3 \cdot 10^2\right)^2\right]^2$ este ……..

(5 puncte)

I.2. Dacă $\overline{9n5} - \overline{7n1} + \overline{2n6} = \overline{n50}$, atunci n este ……..

(5 puncte)

I.3. Un cioban afirmă că mulțimea picioarelor oilor sale este un număr de patru cifre distincte care reprezintă elemente ale mulțimii A U B, unde A = {1, 2, 3} şi B = $\{x \in N \mid 6 \vdots x\}$.

a) Numărul minim de oi este ……..

b) Numărul maxim de oi este ……..

(5 puncte)

I.4. Un elev a depus la CEC suma de 500000 lei cu dobândă de 10% pe an. După un an elevul are la CEC suma de ……..

(5 puncte)

I.5. Soluțiile naturale ale inecuației

$\frac{7+14+21+28+35+42}{3+6+9+12+15+18} + \frac{x}{6} > x$ sunt …..

(5 puncte)

I.6. Dacă x,y,z,t sunt numere naturale prime şi x+2y+6z+42t = 260, atunci x = …, y = …, z = … şi t = …

(5 puncte)

I.7. Numărul natural n pentru care: $8^n + 8^{n+1} = 18 \cdot 2^{2003}$ este …..

(5 puncte)

I.8. Dacă dintr-un număr de trei cifre scădem 7, rezultatul se divide cu 7; dacă scădem 8, rezultatul se divide cu 8 iar dacă scădem 9, rezultatul se divide la 9. atunci numărul este …..

(5 puncte)

I.9. Dintre fracțiile $\frac{222}{223}$ şi $\frac{223}{224}$, cea mai mare este fracția …..

(5 puncte)

I.10. Suma tuturor numerelor $\overline{ab}$ cu a şi b distincte este …..

(5 puncte)

PARTEA II:

II.1. Să se determine două numere naturale ştiind că unul dintre ele este cu 44 mai mare decât celălalt şi că prin împărțirea sumei celor două numere la diferența lor se obține câtul 46 şi restul 26.

(20 puncte)

II.2. Trei numere naturale ***a***, ***3a***, ***6a*** au produsul ***P*** divizibil cu suma lor ***S***. Arătați că:

a) 50 divide suma ***S***;

b) câtul dintre ***P*** şi ***S*** este un număr natural multiplu de 45;

(20 puncte)

<u>Clasa a VI-a</u>

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Dacă $\frac{x}{y} = 0,(6)$ atunci raportul $\frac{3y}{9x+5y}$ are valoarea ……..

(5 puncte)

I.2. Dacă c.m.m.d.c. al numerelor 54 şi $\overline{5x6}$ este 18, atunci c.m.m.m.c. al lor este ……..

(5 puncte)

I.3. Dacă suma inverselor a două numere naturale este $\frac{2005}{1002 \cdot 1003}$, iar produsul lor este 1005006, atunci suma lor este …….

(5 puncte)

I.4. Dacă unghiurile A şi B au măsurile de $54^{\circ}55'$, respectiv $56^{\circ}57'$, atunci suma dintre complementul unghiului A şi suplementul unghiului B este ……..

(5 puncte)

I.5. După ce un călător a parcurs 24% dintr-un drum, mai are de parcurs 130 km până la jumătatea drumului. Lungimea totală a drumului este ……..

(5 puncte)

I.6. Triunghiul ascuțitunghic POM are latura PO = 3cm şi OM = 40mm, iar mediatoarea laturii [PM] intersectează latura [OM] în punctul B. Perimetrul triunghiului POB este ……..

(5 puncte)

I.7. Pentru a anunța ora 5^{00}, un orologiu bate de 5 ori în 5 secunde. Pentru a anunța ora 9^{00}, orologiul va avea nevoie de …….. secunde.

(5 puncte)

I.8. Unghiul $\hat{ABC}$ are măsura 130° şi $A\hat{B}C \equiv C\hat{B}D$. Dacă oricare două dintre ele sunt adiacente, atunci m($A\hat{B}D$) este ………

(5 puncte)

I.9. Dacă punctele A, B şi C aparţin dreptei d astfel încât d(A,B) = 30mm; d(B,C)=1,7cm; atunci d(A,C) este ….cm sau ….mm.

(5 puncte)

I.10. Unghiul care este egal cu 150% din suplementul său are măsura de ….. grade.

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Numerele $a_1, a_2, \dots, a_{111}$ naturale nenule sunt direct proporţionale cu numerele 111, 110, …, 2, 1, iar $a_1 + a_2 + \dots + a_{111} = 31080$. Să se afle numerele $a_1, a_2, \dots, a_{111}$.

(20 puncte)

II.2. Pe laturile [AB] şi [AC] ale ΔABC isoscel cu [AB]≡[AC] se iau punctele D∈(AB), E∈(AC), astfel încât [BD]≡[CE]. Dacă BE∩CD = {P}, atunci:

a) demonstraţi că [BE]≡[CD];

b) demonstraţi că AP este bisectoarea $B\hat{A}C$;

c) Dacă d(A, CD) = 3cm, aflaţi d(A, BE).

(20 puncte)

Clasa a VII-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Dacă a = $\sqrt{1+2+3+...+49}$ şi b=$\sqrt{13(1+2+3+...+25)}$ atunci $|a-b|$ = ……..

(5 puncte)

I.2. Fie numerele (x-1); (x-2); (x-3); ..; (x-50). Pentru x = $\left[2,(3)+\sqrt{1-\frac{5}{9}}\right]:\frac{1}{5}$ produsul numerelor este ..

(5 puncte)

I.3. Fie trapezul ABCD, AB||CD, {O}=AC ∩ BD. Dacă $A_{\Delta BOC} = 16cm^2$ atunci $A_{\Delta AOD}$ = ……..

(5 puncte)

I.4. Fie numerele: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{99}{100} \\ y = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{98}{99} \end{cases}$. Atunci produsul numerelor x şi y este ……..

(5 puncte)

I.5. Fie $\frac{a}{a+4} = \frac{b-3}{b}$ cu a,b $\in$ N*. Valoarea minimă a raportului $\frac{a}{b} = ...$

(5 puncte)

I.6. Fie un patrulater convex cu lungimile laturilor de 10cm, 24cm, 7cm, respectiv 21cm iar una din diagonale de 26cm. Aria patrulaterului este ……..cm^2.

(5 puncte)

I.7. Produsul celor mai mici 3 numere naturale nenule consecutive, divizibil cu 204 este ……..

(5 puncte)

I.8. Fie ABCD un romb la care $m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$. Perimetrul său este de 40 cm. Lungimea lui AC este ....

(5 puncte)

I.9. Fie ABCD un paralelogram, $A' = pr_{BC} A$, $D' = pr_{AB} D$. Ştiind că $AA' = 2,5$; $BC = 5$; $DD' = 4,1(6)$; atunci lungimea laturii AB=...

(5 puncte)

I.10. Fie ABC un triunghi oarecare cu înălţimea AA′ şi mediana AM. Dacă AA′= 12, AM = 13, BC = 30, atunci înălţimea din C este egală cu ……..

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Un triunghi dreptunghic cu $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$. Notăm cu D mijlocul ipotenuzei [BC]. Perpendiculara în D pe BC intersectează cateta [AC] în E.

a) Să se demonstreze că $m(\widehat{ADE}) = m(\hat{B}) - m(\hat{C})$;

b) Să se determine măsurile unghiurilor ΔABC ştiind că (AE)≡(ED).

(20 puncte)

II.2. Se dă numărul n = 1234…20032004:

a) Calculați suma cifrelor numărului n;

b) Arătați că $\sqrt{n}$ este irațional;

c) Scrieți primele trei cifre ale numărului $\sqrt{n}$.

(20 puncte)

Clasa a VIII-a

PARTEA I: Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

I.1. Rezultatul calculului $0,(6)\sqrt{18}-2^{-1}\cdot\sqrt{32}$ este ……..

(5 puncte)

I.2. Elementele mulțimii $A=\left\{x\in Z \,\middle|\, \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}\in N\right\}$ sunt ……..

(5 puncte)

I.3. Dacă DM $\perp$ (ABCD), ABCD pătrat de latură 6 cm şi DM = $\sqrt{7}$ cm, atunci d(M; AC) este …….

(5 puncte)

I.4. Valoarea de adevăr a propoziției:

„$\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}\in Q$”, este ……..

(5 puncte)

I.5. Valorile lui ***a*** numere întregi pentru care A(a; a-3)$\in G_f$, unde f:R$\to$R, f(x) = ***a***x-3, sunt ……..

(5 puncte)

I.6. Volumul unui cub ABCDA′B′C′D′, dacă aria triunghiului A′C′B este de $8\sqrt{3}$ cm^2, este ……cm^3.

(5 puncte)

I.7. Numerele raționale ***a***,***b*** care verifică relația

$a\left(\sqrt{2}+2\right)-b\left(\sqrt{2}+3\right)=3$ sunt ***a*** = …… şi ***b*** = …...

(5 puncte)

I.8. Diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu suma tuturor muchiilor egală cu 48cm şi aria totală 94cm^2, este de ……….. cm.

(5 puncte)

I.9. Valoarea minimă a expresiei

$\sqrt{x^2+4x\sqrt{3}+16}+\sqrt{y^2-6y\sqrt{2}+27}$ este ……..

(5 puncte)

I.10. În vârful B al triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\hat{A})=90^o$ şi AB=4cm, se ridică perpendiculara BD pe planul triunghiului, BD= $4\sqrt{3}$ cm. Măsura unghiului format de planele (DAC) şi (ABC) este ….

(5 puncte)

PARTEA II: Trece pe foaia de concurs rezolvările complete:

II.1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+1$.

a) Calculează măsura unghiului format de graficul funcției cu axa absciselor;

b) Calculează $f(0)+f(2)+f(4)+\ldots+f(2004)$;

c) Calculează:

$E(x)=\sqrt{f^2(x)+3x(x-2)}+\sqrt{(x-1)f(x)-4f(x)+1}$ unde $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$;

d) Demonstrează că $f^2(x)-f(2x-3)\cdot f(1-3x) > 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(20 puncte)

II.2. Fie ABCD un pătrat, $MA \perp (ABC)$, MA = a. Dacă ΔMBD este echilateral, se cere:

a) determină latura pătratului;

b) găseşte cosinusul unghiului format de planele (MBD) şi (ABC);

c) arată că $NO \perp (ABC)$, unde N este mijlocul lui (MC), iar O este centrul pătratului.

(20 puncte)

Proba pe echipaje

Clasa a V-a

1. Se dau numerele:

$$\begin{cases} x=\left(3^{2^{3^0}}+2^{3^{1^9}}+2^3\cdot 5^3:10^2\right):3^2 \\ y=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100} \\ z=5^{1202}+5^{1201}+\ldots+5^3+5^2+5+5^0 \end{cases}$$

a) Calculați x şi 4z+1;

b) Arătați că y este pătratul unui număr rațional pozitiv;

c) Ordonați crescător numerele: $x^{1604}; (100y)^{401}$ şi $4z+1$.

(10 puncte)

2. Mai mulți copii îşi împart o sumă de bani (în lei grei) în mod egal, astfel: primul primeşte o cincime din sumă şi încă un leu greu, al doilea primeşte o cincime din rest şi încă 2 lei grei, al treilea primeşte o cincime din noul rest şi încă trei lei grei şi aşa mai departe.
   a) Aflați suma de bani în lei grei care a fost împărțită;
   b) Determinați numărul copiilor.

(10 puncte)

<u>Clasa a VI-a</u>

1. Să se afle numărul rațional pozitiv care, după ce se măreşte cu 16%, iar rezultatul se micşorează cu 16%, se va micşora cu 16.

(10 puncte)

1. Punctele $A_0, A_1, \ldots, A_{10}$ sunt situate pe dreapta a, astfel încât $[A_1A_3]$ este dublul lui $[A_0A_1]$, $[A_2A_3]$ este dublul lui $[A_1A_2]$ ş.a.m.d. $[A_9A_{10}]$ este dublul lui $[A_8A_9]$. Ştiind că lungimea $[A_0A_{10}] = 2^{11} - 2$, aflați lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor A_0A_1 şi A_9A_{10}.

(10 puncte)

<u>Clasa a VII-a</u>

2. În trapezul ABCD, (AB ∥ CD, AB < CD) notăm cu O intersecția diagonalelor. Paralela prin A la BC intersectează pe BD în F şi pe CD în E. Demonstrați că: $\frac{AF}{AE} = \frac{AO}{OC}$.

(10 puncte)

3. Să se arate că numărul $\sqrt{a} \in N$, unde $a = \underbrace{11...1}_{n+1\text{ ori}} \cdot \underbrace{11...1}_{n-1\text{ ori}} + 10^{n-1}$, $(\forall)\, n \in N, n > 1$

(10 puncte)

<u>Clasa a VIII-a</u>

1. Fie expresia: $F(x) = \frac{4x^2-1}{(x+3)^2 + 2(x+3)(x-4) + (x-4)^2}$, unde $x \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
   a) Arătați că, oricare ar fi $x \in Z$, $(x+3)^2 + 2(x+3)(x-4) + (x-4)^2$ este pătrat perfect.

b) Aduceți expresia F la forma cea mai simplă.

c) Aflați $x \in N$ pentru care $F(x) - 1$ este număr întreg.

d) Rezolvați ecuația $F(x) = \frac{2}{2x-1}$.

e) Aflați $x \in N$ pentru care $3 \le F(x) \le 5$.

(10 puncte)

2. Fie prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul ABCD de latură x şi înălțimea $AA' = y$. Notăm cu O, respectiv O' centrele bazelor ABCD şi $A'B'C'D'$, iar cu M, respectiv N mijloacele muchiilor AA' şi CC'.

a) Aflați x şi y ştiind că sunt numere naturale, iar aria totală a prismei este de 18 cm^2.

b) Pentru $x = 1$ şi $y = 4$, calculați aria totală şi volumul prismei.

c) Arătați că punctele M, O, N şi O' sunt coplanare şi stabiliți natura patrulaterului $MONO'$.

d) Aflați distanța de la M la planul (BDB').

e) Calculați măsura unghiului diedru format de planele (QBD) şi (MNO), unde $\{Q\} = OO' \cap MN$.

(10 puncte)

Probleme şi exerciții propuse

Clasele a III-a şi a IV-a

1. Calculați: {150x5-[182:7+(324:2:6:9+39x3):5]}:7=
2. Află numărul necunoscut:
   40-40:{40+40:[40x40:(40-***a***:4)-140]-32}x5=20
3. Cu cât este mai mic triplul diferenței dintre suma şi diferența numerelor 90 şi 45 decât triplul produsului dintre câtul şi suma lor?
4. Suma a trei numere este 1090. Să se afle numerele, ştiind că primul este de patru ori mai mic decât al doilea, iar al treilea este cu 40 mai mare decât media aritmetică a primelor două.
5. S-au amestecat 5 kg de cafea la 260 lei kilogramul cu 3 kg de cafea la 300 lei kilogramul. Cât costă un kg de cafea amestec?
6. S-au amestecat 3 litri de alcool de 80 grade cu 2 litri de alcool de 60 grade. Câte grade are amestecul obținut?
7. Doi copii au cules mere dintr-un măr. Unul dintre ei a spus:
   - *Dă-mi mie un măr şi vom avea amândoi acelaşi număr de mere*.
   - *Dă-mi tu mie un măr ca să am de două ori mai mult decât tine*, a răspuns celălalt.

   Câte mere avea fiecare copil ?
8. Despre 3 elevi se ştiu următoarele lucruri:
   - Prenumele lor sunt: Petru, Anghel şi Dănuț;
   - Locuiesc în localități diferite: Vaslui, Bacău şi Iaşi;
   - Unul este elev în clasa I, altul în clasa a II-a şi celălalt în clasa a III-a;
   - Cel din clasa I locuieşte în Vaslui;
   - Dănuț este în clasa a II-a;
   - Anghel este prieten cu cel din clasa a III-a, care locuieşte în Bacău.

   Aflați clasa şi localitatea corespunzătoare fiecărui elev.

9. Dacă 2 piersici fac cât o lamâie şi un măr, dacă 2 lămâi fac cât 2 piersici şi o caisă, dacă 4 mere şi o caisă fac cât o piersică şi 2 lămâi, cât fac 2 caise ?

10. EPITAF:

“*Acum că nu mai sunt, îți spun aşa-ntr-o doară:*
Văzui lumina zilei în zodie amară!
Să tot fi fost jupâne, opt ani după Răscoală...(1907)
Cei zece ani de-acasă trecură tam-nisam,
Cu foamea şi cu poarca...prin curți ori pe maidan.
Apoi, intrai în slujbă la un ciocoi hapsân:
Opt ani de-amară pâine, ce pot să vă mai spun.
Găsii o fată dragă şi-un sfert din viața mea,
Trudind la zețărie, i-am petrecut cu ea.
Trei ani îmi mai rămase şi-aceia-n închisoare,
I-am macinat în geamăt şi-n dor de răzbunare.
De ceasul morții mele ziarele n-au scris;
Socoate-l fiecare, mă rog, dacă-i permis!”

11. Dan este cu 2 ani mai mare decât sora sa, Irina. Mama este cu 3 ani mai mică decât tata, iar suma vârstelor celor patru membri este de 101 ani. Ştiind că fiica este de 3 ori mai mică decât mama sa, să se afle câți ani au fiecare.

12. Într-o cutie erau 5 bile albe, 8 bile verzi, 11 bile albastre, 20 galbene, 20 negre, 35 roşii, să se afle:
a) Câte bile trebuie să extragem din cutie fără a le vedea culoarea, pentru a fi siguri că printre ele avem 10 bile de aceeaşi culoare;
b) Dar pentru a avea 15 bile roşii?

13. Ionel şi-a propus să rezolve în vacanță un număr de probleme pentru a se prezenta la concursul „Euclid”. El a gândit astfel: dacă va rezolva câte 7 probleme pe zi, i-ar mai rămâne 18 probleme nerezolvate. Dorind să se joace 3 zile, s-a hotărât să rezolve câte 10 probleme pe zi.
Câte probleme a avut de rezolvat Ionel şi în câte zile le-a terminat?

14. Dacă trei pere cântăresc cât două mere şi două prune, iar două mere cât două pere şi trei prune, atunci o pară cântăreşte …... câte prune?

15. Trei copii aveau respectiv 17 bomboane, 14 bomboane şi 13 bomboane pe care le-au mâncat împreună cu un prietenul lor, Ionuț

care, nu avea bomboane. După ce le-au mâncat pe toate, Ionuț le-a dăruit 22 de nuci. Cum vor împărți cei trei copii aceste nuci?

16. Sora lui Marian de trei ani a rupt la întâmplare 13 foi dintr-o carte. Supărat, Marian a făcut suma numerelor scrise în josul paginilor şi a obținut 2012. Tatăl său l-a atenționat că a greşit la adunare. Era adevărată afirmația? Justificați.

17. Ioana a primit de ziua ei o cutie de bomboane de ciocolată. Ea şi-a propus să le mănânce în 4 zile. Astfel în prima zi a mâncat o cincime din total şi încă 3 bomboane, a doua zi o treime din rest şi încă 2 bomboane, a treia zi un sfert din noul rest şi încă 3 bomboane, iar a patra zi două treimi din noul rest şi încă 4 bomboane. Câte bomboane a mâncat în fiecare zi şi câte erau în cutie?

18. Dacă împărțim un număr la 13, câtul este cu 228 mai mic decât numărul dat. Care este numărul?

19. Jucării: 3 ursuleți, 3 păpuşi şi 2 maşinuțe costă 440 lei. Ştiind că 2 păpuşi costă cât 4 ursuleți, iar un ursuleț costă cât 2 maşinuțe, aflați prețul fiecărei jucării.

20. La o florărie, vânzătoarea face simultan buchete cu câte 13 şi respectiv 17 garoafe. Câte buchete de fiecare fel va face, dacă are doar 159 garoafe.

21. Calculați pe x din expresia: $x - (7\cdot 8 + 3\cdot 9) = 27$.

22. Calculați pe x din expresia: $32:4 + 72:9 - x = 16$.

23. Calculați pe a din expresia: $6\cdot 8 - (3\cdot 9 + a) = 11$

24. a) Aflați termenul necunoscut: $[(x+270:3)\cdot 5+100]:600=1$
b) Calculați: $\{[(126:18+147):14+121]:12-1\}\cdot 11=$

25. a) Calculați: $2018-8\cdot\{7-6\cdot 5-4\cdot(3-2\cdot 1)]\}=$
b) Aflați termenul necunoscut: $\{[(2\cdot x+24):17+8]\cdot 5+28\}\cdot 8=72\cdot 3\cdot 4$

26. a) Aflați numărul necunoscut: $[(1+2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+8+9)-10\cdot 8]\, x=30$
b) Ştiind că A este mai mare decât C cu 10, să se calculeze valorile celor două numere din egalitatea $185+A-15+C=200$

27. Determinați numerele naturale x, y, z din egalitatea:
$15x+(2y+3z):x=22$.

28. Găsiți perechile de numere naturale (a, b) cu $a < b$, pentru care $a\cdot b+3=21$.

29. Calculați expresia: $6 + \{60: [7 + (351:3 + 452:4):10] + 18\}:5 =$

30. Calculați expresia: $\{150\cdot5 - [182:7 + (324:2:6:9 + 39\cdot3):5]\}:7 =$

31. Aflați x din expresia: $40 + \{3\cdot[4 + (3+x):2] - 4\}\cdot3 = 100$

32. Aflați x din expresia: $30+5\cdot\{32: x+5\cdot[40+8\cdot(200:5 - 72:2)]\}=1850$.

33. Calculează:

$2 + 4 + 6 + 8 +.......+ 200=$

$1 + 3 + 5 +...+ 99 – 2 – 4 – 6 -...- 56=$

34. Calculează: $100\cdot99 – 98\cdot99+98\cdot97 – 97\cdot96+ \dots +4\cdot3 – 3\cdot2+2\cdot1 =$

35. Aflați numărul care adunat cu triplul său şi egal cu 36.

36. 5 lumânări ard împreună în 20 de minute. În câte minute va arde jumătate de lumânare?

37. Aflați numărul care adunat cu sfertul său este egal cu 40. Numărul este _________.

38. Aflați numărul care adunat cu jumătatea lui este 27.

39. Fie şirul: 2; 4+6; 8+10+12; ……. . Care este al cincilea termen ?

40. Pentru a se numerota paginile unei cărți au fost necesare 1770 cifre. Câte pagini a avut cartea?

41. Suma a 10 numere naturale nenule este 54. Arătați că măcar două numere sunt egale.

42. Să se afle restul împărțirii la 25: $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot48\cdot49 + 37$.

43. Se dau sumele $2\cdot a+b = 10$ şi $c+d = 13$, unde a şi b numere naturale. Să se calculeze $b+c+2\cdot a+d$ şi $8\cdot a+3\cdot c+4\cdot b+3\cdot d$.

44. Produsul unui număr cu el însuşi împărțit la 2 este egal cu dublul numărului. Aflați numărul.

45. La împărțirea a două numere naturale, deîmpărțitul este 39, iar restul 1. Aflați împărțitorul şi câtul, ştiind că sunt diferite de 1 şi că împărțitorul este mai mare decât câtul.

46. Aflați numerele care, împărțite la un număr de o cifră, dau restul 7 şi câtul de două ori mai mare decât restul.

47. Care sunt perechile de numere naturale care au diferența 3, iar suma lor este un număr de patru cifre al căror produs este 2?

48. Cu cât este mai mare produsul dintre câtul şi suma numerelor 15 şi 5 decât câtul dintre produsul şi câtul lor?

49. Aflați două numere care diferă unul de altul cu 424 şi au câtul 3, rest 2.

50. Aflați cele două numere naturale, ştiind că diferența lor este 5, iar la împărțirea dintre triplul sumei lor şi dublul diferenței se obțin câtul 9 şi restul 3.

51. Suma a două numere este 64. Dacă împărțim suma la îndoitul diferenței lor obținem câtul 4 şi restul 0. Care sunt numerele?

52. Aflați numerele *a* şi *b*, ştiind că diferența lor este 10, iar la împărțirea dintre suma lor mărită de 5 ori şi diferența lor mărită de 4 ori obținem câtul 2 şi restul 0.

53. Împărțind un număr natural nenul la 7 obținem restul egal cu câtul. Determină numărul. Câte soluții are problema ?

54. Să se afle numerele naturale de forma xyz, ştiind că: xy+yz+zx=121 şi x<y<z.

55. Aflǎ numerele naturale *a* şi *b* ştiind cǎ $(a - 1)\cdot(b - 3) = 12$ şi suma $a+b$ este maximǎ.

56. Un număr de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferența dintre cifra sutelor şi cea a unităților este 4. Să se afle numărul.

57. Aflǎ x, y, z cifre distincte, pentru care $\overline{xx} + \overline{yx} + \overline{zx} = \overline{xy3}$.

58. Câtul dintre triplul sumei a trei numere consecutive şi 17 este 6 şi rest 6. Aflǎ numerele.

59. Suma a două numere naturale este 64. Dacă împărțim suma la jumătatea diferenței lor obținem câtul 4. Care sunt numerele ?

60. La împărțirea a două numere naturale, deîmpărțitul este 37, iar restul 1. Aflați împărțitorul şi câtul, ştiind că sunt diferite de 1 şi că împărțitorul este mai mare decât câtul.

61. Să se afle trei numere pare, consecutive care au suma un număr de forma $\overline{xx}$.

62. Scrie toate numerele naturale de 4 cifre distincte, care au cifra zecilor 7 şi suma cifrelor 11.

63. Scrie numerele naturale pare de forma $\overline{a5b}$, care au suma cifrelor 14.

64. Să se determine numerele $\overline{ab}$ (numere naturale de două cifre) care au proprietatea că fiecare este de patru ori suma cifrelor sale.

65. Să se determine numerele *a*,*b*,*c*,*d* dacă produsul lor este 24, produsul dintre primul şi al treilea este 8, iar suma dintre al doilea şi al treilea este 7. Cu valorile găsite scrieți cel mai mare şi cel mai mic număr natural de 4 cifre.

66. Într-o împărțire a două numere naturale, câtul este un sfert din împărțitor, iar restul jumătate din cât. Suma împărțitorului cu câtul şi restul este 44. Să se reconstituie împărțirea.

67. Câtul a două numere naturale este 3. Dacă se măresc ambele numere cu 10, câtul lor va fi 2. Să se determine cele două numere.

68. În două lădițe erau 59 de mere. După ce Ioana a mâncat 26 de mere din prima lădiță şi 17 mere din a doua, a constatat că a rămas un număr egal de mere în fiecare ladă. Câte mere erau la început în fiecare lădiță?

69. Într-o cutie sunt 61 de fundițe: roşii, verzi şi albe. După ce s-a folosit acelaşi număr de fundițe din fiecare culoare, în cutie au rămas: 12 fundițe roşii, 15 fundițe verzi şi 7 fundițe albe. Câte fundițe de fiecare culoare erau la început în cutie?

70. Suma a 3 numere este 63. Să se afle numerele, ştiind că primul număr este un sfert din al doilea număr şi jumătate din al treilea. Care sunt numerele?

71. Trei frați au împreună 45 lei. Câți lei are fiecare, dacă cel mare are de 3 ori suma celui mic, iar mijlociul are jumătatea sumei mezinului?

72. O lucrare de construcție a fost plătită cu 31900 lei unor zidari şi unor dulgheri. Primii au primit câte 500 lei, ceilalți câte 600 lei. Toți dulgherii au primit împreună cu 3100 lei mai puțin decât zidarii. Câți zidari şi câți dulgheri au realizat lucrarea?

73. Pentru o grădiniță s-au cumpărat mere şi caise, 70kg, plătindu-se 420000 lei. Cantitatea de mere cumpărate a fost de 4 ori mai mare

decât cea de caise. 1 kg de caise a costat de 2 ori mai mult decât 1 kg de mere. Câți lei a costat 1 kg de mere? Dar 1 kg de caise?

74. Suma a trei numere este 6040. Dacă se împarte primul număr la al doilea, se obține câtul 2 şi restul egal cu al treilea număr. Aflați cele trei numere ştiind că al treilea număr este de 100 de ori mai mic decât al doilea număr.

75. În două coşulețe, Ana are căpşune. Primul coşuleț are cu 38 căpşune mai multe decât al doilea. Câte căpşune trebuie să mute Ana din primul coşuleț în al doilea, pentru ca în acesta să fie cu 12 căpşune mai multe decât în primul?

76. Se dau trei numere naturale. Al doilea număr este pătrimea primului număr plus 4, iar al treilea număr este sfertul celui de-al doilea plus 4. Ştiind că diferența dintre primul şi al treilea număr este de 145, aflați valoarea celor trei numere.

77. Să se afle patru numere pare consecutive a căror sumă este egală cu: (400 – 240 + 100) : (10 – 5) =

78. Suma a trei numere *a*, *b*, *c* este 900. Aflați numerele ştiind că *b* este de trei ori mai mare decât *a* şi cu 25 mai mic decât *c*.

79. Aflați suma a patru numere naturale *a*,*b*,*c*,*d* ştiind că suma primelor două este 56, al treilea număr este suma jumătăților primelor două numere, iar al patrulea este cu 25 mai mic decât triplul lui *c*.

80. Suma a două numere este produsul dintre numerele 160 si 5. Cât este fiecare număr dacă al doilea număr e mai mic decât primul număr cu 284?

81. Un frate şi o soră au împreună 60 de ani. Când fratele avea 10 ani, fata avea 14 ani. Câți ani are fiecare acum?

82. Anca a citit o carte de 210 pagini în patru zile astfel: în prima şi a doua zi a citit 100 de pagini, a patra zi a citit cu 10 pagini mai mult decât a treia zi şi cu 20 mai mult decât a doua zi. Câte pagini a citit în fiecare zi?

83. Din triplul numărului 197 scădeți sfertul numărului 2024. Diferența obținută o micşorați de 5 ori, apoi noul rezultat îl măriți cu 105. Comparați numărul obținut cu 199.

84. Avem trei numere. Dacă împărţim primul număr la al doilea sau al doilea la al treilea obţinem câtul 2 şi restul 1. Aflaţi cele 3 numere ştiind că diferenţa dintre primul şi al treilea este 42.

85. La un magazin este un număr de calculatoare de 4 ori mai mare decât la altul. Dacă primul magazin vinde 96 de calculatoare şi al doilea 6 calculatoare, atunci rămâne un număr egal de calculatoare. Câte calculatoare au fost la început în fiecare magazin?

86. Suma a două numere este 780. Dacă primul număr se împarte exact la 3 şi al doilea exact la 2, diferenţa câturilor este 10. aflaţi cele două numere.

87. Suma a două numere este cu 206 mai mare decât diferenţa lor. Al doilea număr este cu 141 mai mic decât diferenţa. Aflǎ numerele.

88. Victor şi cei doi fraţi ai săi, care sunt gemeni, au împreună 39 ani. Câţi ani are fiecare dacă acum cinci ani, suma vârstelor celor doi gemeni era egală cu vârsta lui Victor ?

89. Să se afle două numere ştiind că suma lor este de 5 ori mai mare decât diferenţa lor, iar la împărţirea celor două numere se obţine câtul 1 şi restul 3.

90. La cei 10 ani ai săi, Costel observă că adunând vârsta sa cu cea a bunicului obţine de 2 ori vârsta tatălui. Aflaţi vârsta bunicului şi a fiului acestuia dacă peste 7 ani bunicul va avea cu 50 de ani mai mult decât nepotul.

91. În 7 cutii se află acelaşi număr de piese (figuri geometrice). Dacă din fiecare cutie se iau câte 25 piese, în cele 7 cutii rămân tot atâtea piese câte au fost la început în 2 cutii. Câte piese au fost la început în fiecare cutie ?

92. Într-o cutie sunt de 4 ori mai multe bile roşii decât albe. Dacă se iau 6 bile roşii şi 3 bile albe, în cutie rămân de 6 ori mai multe bile roşii decât bile albe. Câte bile roşii şi câte bile albe au fost la început ?

93. Magazinul METRO a vândut într-o zi 14852 kg cartofi, cu 6957 kg mai puţin ceapă, morcov 693 kg, iar pătrunjel de 3 ori mai puţin .... şi 1469 kg varză. Câte kilograme de legume a vândut magazinul?

94. În trei lăzi sunt 612 kg de marfă. În a doua ladă este de 2 ori mai multă marfă decât în prima şi cu 2 kg mai puţin decât în a treia. Câte kilograme de marfă sunt în fiecare ladă ?

95. Dintr-o țeavă de oțel de 458 g s-au tăiat: o țeavă mică, o țeavă de 2 ori mai mare decât prima şi două țevi de 3 ori mai mari decât prima şi au rămas 8 g de țeavă. Cât cântăreşte fiecare țeavă ?

96. Tatăl împreună cu fiul au 85 de ani. Tatăl este mai bătrân decât fiul cu 45 de ani. Să se determine peste câți ani tatăl va avea vârsta dublă în raport cu fiul.

97. Mama, tata şi fiul au împreună 125 de ani. Dacă mama şi tata au aceeaşi vârstă egală cu de 2 ori vârsta fiului, să se afle cu câți ani este mai mare tatăl decât fiul.

98. Mama are de 2 ori vârsta fiicei şi este cu 2 ani mai mică decât soțul ei. Împreună cei trei au 102 ani. Să se determine vârsta mamei.

99. Un casier, fiind întrebat cât a încasat într-o zi, a răspuns: *„Dacă aş mai fi încasat un sfert din cât am încasat şi încă 500 lei, atunci aş fi încasat 55100 lei.”* Cât a încasat casierul în ziua respectivă?

100. Raluca are de 5 ori mai mulți bani decât Diana. Dacă i-ar da Dianei 53 lei şi ar cheltui 62 lei, cele două prietene ar avea sume egale. Câți lei are fiecare?

101. Pe o carte am dat 4 lei şi jumătate din prețul ei, iar pe un joc 12 lei şi un sfert din prețul său. Câți lei costă cartea şi jocul împreună? Dar 5 cărți şi 8 jocuri?

102. Mihaela are 10 ani, iar mama ei 43 ani. Peste câți ani vârsta Mihaelei va fi jumătate din vârsta mamei?

103. Întrebat câți elevi are, Pitagora a răspuns: "*Jumătate din ei studiază matematica, o pătrime studiază natura, o şeptime meditează în tăcere, iar restul sunt 3 fecioare.*" Câți elevi avea Pitagora?

104. La un concurs de matematică, un elev obține pentru 8 probleme 46 de puncte. Câte probleme au fost corecte şi câte greşite, ştiind că pentru o problemă rezolvată corect a obținut 10 puncte, iar pentru o problemă greşită a pierdut 7 puncte ?

105. "- *Dă-mi 2 creioane de la tine pentru a avea câte ai tu*", spune Ioana.
"- *Dă-mi tu 2 creioane şi voi avea de două ori mai mult ca tine*", răspunde Anca.
Câte creioane are fiecare?

106. Peste 2 ani, vârsta Mariei va fi o treime din vârsta mamei, dar cu 8 ani în urmă vârsta fetei era o optime din cea a mamei. Ce vârstă are fiecare acum ?

107. Trei copii şi-au împărţit un număr întreg de nuci cuprins între 250 şi 300, astfel: primul a primit un număr de perechi egal cu numărul grămezilor de câte 5 nuci primite de al doilea şi cu dublul numărului de grămezi de câte 13 primite de-al treilea. Câte nuci a primit fiecare ?

108. Aflaţi numerele naturale *a* şi *b*, ştiind că diferenţa lor este 10, iar câtul la împărţirea dintre suma lor mărită de 5 ori şi diferenţa lor mărită de 4 ori este 2.

109. În trei lăzi sunt 72 nuci. Dacă o treime din numărul nucilor din prima ladă se mută în a doua ladă, apoi un sfert din numărul nucilor din lada a doua se mută în a treia ladă, în fiecare ladă avem acelaşi număr de nuci. Câte nuci au fost iniţial în fiecare ladă ?

110. Trei fraţi au depus la bancă câte 750 lei. Doresc să-şi cumpere un laptop care costă 3610 lei. Pentru fiecare 100 lei, ei primesc dobândă anuală de 20 lei. Pot să-şi cumpere laptopul după 2 ani? Dacă nu, de ce sumă mai au nevoie? Dacă da, ce sumă le mai rămâne? (Presupunem că preţul şi dobânda nu se modifică).

111. Într-o urnă sunt 20 bile identice, numerotate de la 1 la 20. Se extrag 4 bile. Prima bilă extrasă are numărul 10, a doua are numărul egal cu o pătrime din numărul bilei a treia, iar a patra bilă are numărul o doime din suma numerelor primelor două bile, adică 7. Care este suma numerelor bilelor extrase ?

112. După ce a parcurs două din cele 5 părţi egale ale unui drum, un călător constată că mai are de parcurs cu 75 km mai mult decât a mers până aici. Ce lungime are drumul?

113. Într-o clasă sunt 32 băieţi şi fete. Câţi băieţi şi fete sunt, ştiind că, dacă ar fi cu 4 băieţi mai puţini, un sfert din numărul lor ar fi egal cu o treime din numărul fetelor.

114. Se împart 48 de mere în două grămezi. Se iau din prima grămadă cât sunt în a doua şi se adaugă în a doua. Se ia din a doua grămadă o pătrime din numărul de mere care era iniţial în prima şi se adaugă în prima grămadă. În urma acestor operaţii, grămezile au acelaşi număr de mere. Câte mere au fost la început în fiecare grămadă?

115. Suma a trei numere este 120. Dacă am scădea 7 din primul număr şi am adăuga 7 la al doilea număr, primul număr ar deveni de 3 ori mai mare decât al doilea, iar dacă din al treilea am scădea 5 şi am adăuga la al doilea 5, atunci al treilea ar deveni cu 2 mai mare decât al doilea. Care sunt cele trei numere?

116. Dintr-un număr scădem jumătate din el şi încă 1, din rest scădem jumătate din el şi încă 1, din rezultat scădem din nou jumătate şi încă 1 şi se obține 6. Care este numărul inițial ?

117. Aflați 6 numere naturale consecutive, ştiind că triplul sumei primelor trei este egal cu dublul sumei ultimelor trei.

118. Pe o masă sunt 5 cărți numerotate de la 1 la 5. Prima carte are cel mai mic număr de pagini, a doua are un număr de pagini egal cu triplul paginilor primei cărți, iar fiecare dintre următoarele trei cărți au câte un număr de pagini egal cu suma paginilor precedentelor două. Aflați câte pagini au toate cele cinci cărți, dacă ultima carte are cu 72 de pagini mai mult decât prima şi a patra la un loc.

119. Fiind întrebată ce vârstă are, Maria a răspuns: „*Cu 5 ani în urmă aveam de 3 ori mai puțin decât voi avea peste 7 ani*”. Câți ani are Maria?

120. Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 3, obținem un număr cu 54 mai mic decât numărul pe care îl vom obține dacă scriem cifra 3 la sfârşitul lui. Care este acel număr?

121. Ana şi Maria au împreună 336 fotografii, puse în două albume care au acelaşi număr de foi fiecare. Ştiind că pe o foaie din albumul Anei se pot pune 16 fotografii, iar pe o foaie din albumul Mariei se pot pune 12 fotografii, aflați câte fotografii are fiecare fată.

122. La un concurs pe teme geografice, din clasa a IV-a A s-au prezentat Andrei, Bogdan şi Codrin. Ei au avut de răspuns, fiecare, la câte 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect li s-au acordat 10 puncte, iar fiecare răspuns greşit a fost penalizat cu 5 puncte. Stabiliți clasamentul final, dacă Andrei a dat cu trei răspunsuri bune mai puțin decât Codrin.

123. Mihai, Andrei şi Ioana au împreună 360 de timbre. Dacă Mihai i-ar da lui Andrei 15 timbre şi Ioanei 35 timbre, atunci Mihai ar avea de 3 ori mai puține decât Ioana şi de două ori mai puține decât Andrei. Câte timbre a avut fiecare?

124. Într-un magazin au fost 140 m de stofă cu preţul de 18500 lei / m şi 168 m de pânză albă cu preţul de 5000 lei / m. La sfârşitul zilei a mai rămas în magazie $\frac{1}{5}$ din cantitatea de stofă şi $\frac{1}{3}$ din cantitatea de pânză. Cât s-a încasat pe marfa vândută?

125. Pentru a cumpăra 4 mingi de fotbal mai trebuie 15 lei iar dacă se cumpără 3 mingi mai rămân 10 lei. Cât costă o minge şi câţi lei sunt?

126. Trei grădini dreptunghiulare au suma perimetrelor de 1090 m. Prima grădină are perimetrul cu 108 m mai mare decât a doua grădină şi cu 316 m mai mic decât a treia grădină. Să se afle lungimea celei de-a treia grădină, care are lăţimea cât un sfert din lungime.

127. În două cutii mari şi trei cutii mici sunt 111 bomboane. Câte bomboane sunt în cutiile mari şi câte în cele mici, dacă o cutie mică are cu 8 bomboane mai puţine decât una mare?

128. Suma vârstelor a doi fraţi este egală cu jumătate din vârsta mamei. Acum 6 ani, vârsta mamei era de 5 ori mai mare decât suma vârstelor celor 2 copii. Ce vârstă are fiecare copil în prezent, dacă unul este cu doi ani mai mic decât celălalt?

129. O familie are 4 copii. Nici unul dintre aceştia nu este cel mai mic, dar nici cel mai mare. Ce vârstă are fiecare, dacă, produsul vârstelor lor este 36?

130. Alina, mama şi tata au împreună 64 de ani. Alina are vârsta de trei ori mai mică decât mama, iar tata, cât cele două la un loc. Câţi ani are fiecare? Peste câţi ani, tata va avea dublul vârstei Alinei?

131. Pentru împodobirea bradului de Crăciun s-au cumpărat 118 globuleţe galbene şi roşii. Câte globuleţe din fiecare culoare sunt ştiind că, dacă ar fi cu 8 mai puţine galbene, atunci jumătate din numărul celor galbene ar reprezenta de trei ori mai mult decât un sfert din numărul celor roşii.

132. Aşteptând nepoţii în vizită, bunica a pregătit prăjituri. Numărând prăjiturile şi-a spus: „Pentru ca fiecare nepot sa capete cate 5 prăjituri ar trebui sa mai gătesc 3, daca insa fiecare se mulţumeşte cu doar 4, atunci 3 prăjituri vor rămâne pentru mine”. Câţi nepoţi are bunica?

133. La o fermă cresc oi şi găini. În total sunt 745 capete şi 1880 picioare. Câte oi şi câte găini sunt la fermă ?

134. Cristina a primit de ziua ei trandafiri. Dacă îi aşează câte 3 în vază, îi rămân 10 trandafiri, iar dacă îi aşează câte 5, în ultima vază va fi doar unul. Câți trandafiri a primit Cristina ?.

135. Află câte fete şi câți băieți participă la un joc, ştiind că dacă formează echipe fată-băiat, rămân 8 fete fără pereche, iar dacă formează echipe compuse din 3 fete şi un băiat, rămân 2 băieți fără pereche.

136. Dacă se aşează câte 10 creioane într-o cutie, rămân 6 cutii goale şi o cutie cu 9 creioane, iar dacă se aşează câte 6 creioane într-o cutie, rămân 3 creioane. Câte cutii şi câte creioane sunt?

137. Într-o cutie sunt trei feluri de bomboane: 10 cu mentă, 7 cu ciocolată şi 15 cu fructe. Care este numărul minim pe care trebuie să le luăm din cutie pentru a fi siguri că luăm câte o bomboană de fiecare fel?

138. Ancuța are într-un sertar din dulapul său 7 şosete albe şi 7 şosete negre. Pentru că becul din camera sa nu funcționează, ea se întreabă:
   a) Câte şosete trebuie să ia pentru a fi sigură că va încălța o pereche de aceeaşi culoare?
   b) Câte şosete trebuie să ia pentru a fi sigură că printre ele se află o pereche de şosete albe?

139. Într-o ladă au fost amestecate mere de 3 soiuri. Care este cel mai mic număr de mere scoase la întâmplare din ladă, pentru ca printre ele să se găsească:
   a) cel puțin 2 mere din acelaşi soi;
   b) cel puțin 3 mere din acelaşi soi.

140. Oana are mere şi pere. Dacă le grupează câte un măr şi o pară, rămâne cu 6 pere, iar dacă le grupează câte un măr şi două pere, îi rămân două mere. Câte fructe are din fiecare?

141. Într-o Grădină Zoologică, patrupedele, păsările şi şerpii au în total 400 capete, 1200 picioare şi 450 limbi. Câte patrupede, păsări şi şerpi (presupuşi a avea două limbi fiecare) sunt în acea grădină?

142. Într-o cabană sportivă sunt mai puțin de 400 sportivi. Dacă ei s-ar grupa câte 2,3,4 sau 5 atunci, de fiecare dată, ar rămâne unul

singur. Dacă s-ar grupa câte 7 atunci nici un sportiv nu ar rămâne în afara grupelor. Câți sportivi sunt în cabană?

143. De o parte şi de alta a unei alei de 138m s-au pus bănci cu lungimea de 2m şi distanța dintre ele de 15m. câte bănci sunt ştiind că aceştia s-au pus chiar din capătul aleii ?

144. Într-o sală de spectacole, scaunele sunt aşezate câte 15 pe un rând, în total fiind 25 de rânduri. Scaunele sunt numerotate de la 1 la 375.
a) Ce număr are scaunul din centrul sălii ?
b) Ce numere au scaunele de pe rândul 22 ?

145. Într-o urnă sunt 300 bile roşii, galbene şi albastre. Ştiind că 235 nu sunt roşii, iar dacă mărim de 5 ori numărul bilelor galbene mărit cu 5, obținem un număr de 3 ori mai mic decât bilele albe, să se afle care este numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita în urnă, pentru a fi siguri că am luat cel puțin 3 bile:
a) albastre;
b) de aceeaşi culoare;
c) din fiecare culoare.

146. Un elev isteț trebuie să deschidă 6 dulapuri cu 6 chei, fără să ştie care cheie corespunde fiecărui dulap. Care este numărul maxim de încercări pentru a deschide fiecare dulap ?

147. Pentru traversarea unui râu un grup de copii angajează un barcagiu în a cărui barcă încap 7 persoane. Câte drumuri dus-întors trebuie să facă acest barcagiu? Eşti sigur? Mai verifică o dată!

148. Dacă tipărirea unei cărți durează 7 săptămâni şi ea a început la 15 mai, când se va termina de tipărit cartea?

149. Reconstituie un număr de telefon despre care ştim:
- numărul are 6 cifre;
- numărul format din ultimele 3 cifre este 4 ori mai mare decât numărul format din primele 3 cifre;
- cifra a treia şi a patra sunt identice;
- a doua cifră este dublul primei cifre;
- a treia cifră este dublul celei de-a doua, fiind în acelaşi timp şi cu 2 mai mare ca aceasta.

150. Trei copii aveau de împărțit 23 lei şi primul trebuia să ia o doime, al doilea o treime şi al treilea o optime din sumă. Un coleg al lor, care avea şi el 1 leu, a reuşit să le facă această împărțire. Câți lei a luat fiecare copil?

Clasa a V-a

1. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab}+\overline{ba}+a+b$ este pătrat perfect, *a* și *b* distincte.

2. Aflați restul împărțirii numărului A=1·2·3·4·.......· 50+2012 la 2009.

3. Aflați ce rest se obține prin împărțirea la 10 a numărului $n=(3+6+9+.....+231)^{231}$.

4. Stabiliți dacă numărul $\dfrac{2^{n+1}\cdot 3^{n}+2^{n}\cdot 3^{n+1}+6^{n+1}}{2^{n+1}\cdot 3^{n+1}+5\cdot 6^{n}}$ este număr natural, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

5. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ și $\overline{xy}$ pentru care are loc relația $\overline{abc}+\overline{bc}+c=2^{\overline{xy}}+57$.

6. Stabiliți dacă există numere naturale *a*, *b*, *c* care verifică relația: $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=2003$. Justificați răspunsul.

7. Să se găsească numărul de forma $\overline{xxy6}$, care împărțit la un număr de două cifre, dă restul 98.

8. Fie mulțimile: A=$\{x\in\mathbf{N}/\,x=2^{2^{n}},n\in\mathbf{N}^{*},n<3\}$;

B=$\{y\in\mathbf{N}/\,y^{2}=x,x\in A\}$; C=$\{z\in\mathbf{N}/\,z=y^{2}-1,y\in B\}$;

a) Determinați elementele mulțimilor;

b) Calculați $A\cup B, A\cap B$, B\A, B\C.

9. Fie mulțimile: A=$\{x\in\mathbf{N}/\,x=4n+1,n\in\mathbf{N}\}$;

B=$\{y\in\mathbf{N}/\,y=3m,m\in\mathbf{N}\}$; C=$\{p\in\mathbf{N},\ p\le 20\}$;

a) Care dintre numerele 122, 621, 1290 este din A ?

b) Calculați $C-(A\cup B)$.

c) Scrieți forma generală a unui număr din $A\cap B$.

10. Emilia împreună cu tatăl său și bunica sa au 90 de ani. Peste 2 ani, tatăl va avea de opt ori vârsta fiicei, iar bunica va avea de două ori vârsta actuală a tatălui. Ce vârstă are fiecare în prezent?

11. Se împarte numărul natural x la numărul natural y şi se obține câtul 7 şi restul 13.

a) Să se arate că $3x - 21y - 23$ este un pătrat perfect.

b) Să se determine x şi y dacă $3x$-$2y \leq 305$.

12. Numerele naturale a, b, c verifică relațiile a+3b+5c=200 şi a+4b+7c=225. Determinați valoarea sumei a+b+c.

13. Demonstrați că numărul 19^n unde n este un număr natural nenul se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.

14. Arătați că numărul N=11…113, unde cifra 1 se repetă de 2011 ori se divide cu 13.

15. a) Să se determine numerele naturale distincte a, b, c astfel încât numărul $\dfrac{143}{a^5 + bc + ac}$ să fie număr natural.

b) Să se afle numerele naturale $\overline{xyz}$, în baya 10, ştiind că $\dfrac{14}{x^3 + y^2 + z} \in \mathbf{N}$.

16. Media aritmetică a şase numere este 30. Ştiind că al treilea este egal cu o zecime din al cincilea, cu o pătrime din al şaselea şi cu o cincime din din al patrulea; media aritmetică dintre al treilea, al cincilea şi al şaselea număr este egală cu media aritmetică ditre primul, al doilea şi al patrulea număr, iar al doilea număr este egal cu o pătrime din primul, să se afle cele şase numere.

17. Să se determine numărul $\overline{xyzt}$ cu proprietatea că raportul $\dfrac{\overline{xyzt}}{\overline{xy} + \overline{zt}}$ are cea mai mică valoare posibilă.

18. Să se determine numărul natural de forma $\overline{xyzxt}$ care satisface condiția: $\overline{xyzxt} = \overline{xx}^{\,x}$.

19. Se consideră mulțimea de numere naturale A, ştiind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:

1) $2 \in A$;

2) Dacă $x \in A$, atunci $3x+2 \in A$;

3) Dacă $x^2+1 \in A$, atunci $x \in A$;

Să se arate că: $\{1, 4, 5, 26\} \subset A$.

20. Fie mulțimile: A=$\{x / x = 5n + 7, n \in N\}$ şi
B $= \{y / y = 2005p + 3, p \in N\}$. Calculați câte elemente are mulțimea $A \cap B$.

21. La o şcoală cu 1104 de elevi din Iaşi se organizează în vacanța de Paşte trei activități: o excursie la Vatra Dornei, vizionarea unui film la Cinema City şi o întrecere sportivă pe stadion. Se ştie că fiecare elev participă la cel puțin o activitate şi că: a) 51 participă la film şi la întrecerea sportivă, dar nu şi la excursie; b) 63 participă numai la film; c) 720 merg la Vatra Dornei; d) 90 merg numai în excursie şi la întrecerea sportivă; e) numărul celor care merg numai în excursie şi la film este de trei ori mai mare decât al celor care participă la toate activitățile şi este egal cu al celor care participă numai la întrecerea sportivă. Câți elevi merg numai în excursie la Vatra Dornei?

22. Aflați numărul natural x din egalitatea:
$4 + 5^0 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + ... + 4 \cdot 5^{5x-1} + 2 \cdot 5^{4x} = 4375$.

23. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$ ştiind că:
$(\overline{abcd})^1 \cdot (\overline{abcd})^3 \cdot (\overline{abcd})^5 \cdot .... \cdot (\overline{abcd})^{4009} = (\overline{abcd})^{(\overline{abcd})^2}$.

24. Fie şirul de numere naturale 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4,....., 1, 2, 3, 4,....., n.
a) Determinați numărul de termeni ai şirului pentru n = 63.
b) Ce termen este pe locul 2007?

25. Stabiliți dacă există două numere naturale x şi y care să verifice egalitatea: $x^3 + y^3 = 3x + 5y + 1999$.

26. Să se afle din câți elevi este formată o clasă, ştiind că: dacă ar pleca un băiat şi ar veni două fete, atunci numărul băieților ar fie gal cu $\frac{2}{3}$ din numărul fetelor, iar dacă ar pleca o fată şi ar veni doi băieți, atunci numărul băieților ar fie gal cu numărul fetelor.

27. Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 3 dau restul 1 şi împărțite la 6 dau restul 3.

28. Un număr de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferența dintre cifra sutelor şi cea a unităților este 4. Să se afle numărul.

29. Aflați câtul împărțirii numărului 2002 prin numărul natural a , dacă restul este (4-a).

30. Fie numărul natural:
$a = 2^{n+3} \cdot 15^{n+2} + 3^n \cdot 10^{n+2} + 30^{n+1} + 69 \cdot 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n$. Arătați că 1999 divide pe a.

31. Să se determine numerele naturale x şi y ştiind că
$y^2 + y = 2^x + 5111$.

32. Să se determine cel mai mare număr natural $\overline{abcd}$ care împărțit la $\overline{aad}$ dă câtul 8 şi restul $\overline{abd}$.

33. Să se determine numărul $\overline{xyzt}$, ştiind că împărțindu-l la numărul $\overline{yzt}$ obținem câtul $x+1$ şi restul $x+2$.

34. Suma cifrelor unui număr natural în baza zece este egală cu 1995. Poate fi acest număr pătrat perfect?

35. Determinați elementele mulțimii $A = \{\overline{abc} / 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{bc}} = 2^{\overline{ac}}\}$.

36. O mamă are doi copii. Vârsta mamei se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră fiind vârsta unuia dintre copii. Dacă la vârsta mamei se adaugă vârsta celor doi copii, se obține vârsta de 49 de ani. Ce vârstă are mama? Dar cei doi copii?

37. Aflați x din egalitatea:
$x(1 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{2000}) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2001}$.

38. Să se afle numărul natural de forma $\overline{abc}$ care împărțit la 5 dă câtul $\overline{bc}$ şi restul a.

39. Aflați numerele $\overline{abc}$, astfel încât împărțind $\overline{abc}$ la $\overline{bc}$ obținem câtul 7 şi restul 20.

40. Să se determine numerele naturale a, b, c care satisfac relațiile:

$a \cdot b = \{(2^5 \cdot 8^6) : [(16^4)^5 : (32^3)^4]\} \cdot 9$

$b \cdot c = \{(3 \cdot 9^6) : [(27^3)^4 : (81^2)^3]\} \cdot 4^2$

$c \cdot a = [(12^3 \cdot 36^2) : 24^3] : 3$

41. Să se afle cel mai mic număr natural de două cifre cu proprietatea că suma dintre pătratul şi cubul lui este un pătrat perfect.

42. Directorul unei şcoli trebuie să-şi anunţe elevii care sunt deja plecaţi acasă că a doua zi, din cauza condiţiilor meteorologice nu se învaţă. El procedează astfel: într-o primă etapă trimite câte un SMS la trei elevi; în a doua etapă cei trei elevi trimit fiecare câte un SMS la alţi trei elevi şi aşa mai departe. Aflaţi în câte etape sunt informaţi elevii ştiind că în şcoală sunt 1100 de elevi, iar 8 elevi nu au telefon.

43. Calculaţi suma primilor 20 de termeni ai şirului 1, 6, 11, 16, 21, ...

44. Arătaţi că suma numerelor: $x=\frac{2}{9}+\frac{3}{12}+...+\frac{1002}{3009}$,

$y=\frac{3}{9}+\frac{4}{12}+...+\frac{1003}{3009}$, $z=\frac{4}{9}+\frac{5}{12}+...+\frac{1004}{3009}$ este un număr divizibil cu 7, 11 şi 13.

45. Media aritmetică a numerelor naturale a,b,c este 24, iar media aritmetică a numerelor b şi c este 13. Dacă împărţim suma $(b+c)$ la c, obţinem câtul egal cu împărţitorul. Determinaţi numerele a,b,c.

Clasa a VI-a

1. Care este probabilitatea ca aruncând două zaruri să obținem o dublă?

2. O urnă conține 30 bile identice, numerotate cu 1, 2, ... 30. Care este probabilitatea ca printr-o extragere să obținem o bilă numerotată cu un pătrat perfect ?

3. Să se afle numerele naturale $\boldsymbol{a}$ şi $\boldsymbol{b}$, astfel încât să avem: $\frac{5}{\boldsymbol{a}}=\frac{12}{\boldsymbol{b}}$ şi $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 240$.

4. Să se afle numerele naturale de două cifre astfel încât raportul dintre ele şi răsturnatele lor să fie $\frac{4}{7}$.

5. Să se determine fracțiile $\frac{3}{\boldsymbol{a}}$, $\frac{4}{\boldsymbol{b}}$, $\frac{5}{\boldsymbol{c}}$, ştiind că sunt reprezentanți ai aceluiaşi număr rațional şi că $2\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a} = 40$.

6. Să se determine numerele naturale $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ştiind că fracțiile $\frac{2}{\boldsymbol{a}}$ şi $\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{3}$ sunt reprezentanți ai aceluiaşi număr rațional.

7. Să se determine $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ştiind că $\frac{\boldsymbol{a}}{12}=\frac{\boldsymbol{b}}{15}=\frac{\boldsymbol{c}}{30}$ şi $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 1600$.

8. Fie şirul de rapoarte: $\frac{\boldsymbol{x}}{2}=\frac{\boldsymbol{y}}{8}=\frac{\boldsymbol{z}}{10}$.
   a) Aflați cât la sută reprezintă numărul mai mic din fiecare din celelalte numere.
   b) Determinați $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ ştiind că $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}):\boldsymbol{z} = 24$.

9. Să se afle n, $n \in \mathbf{N}$, din proporția: $\frac{3^n+1}{3^n}=\frac{15\cdot 4^n+4\cdot 5^n}{15\cdot 4^n}$.

10. Se dă şirul de rapoarte: $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}=\frac{8}{z}=\frac{2}{t}$. Să se afle x, y, z, t ştiind că $x \cdot y = z = t^2$.

11. Să se determine valoarea raportului $\frac{3y}{9x+5y}$ ştiind că $\frac{x}{y}=0,(6)$.

12. Se dau numerele 54 şi $\overline{5x6}$. Cel mai mare divizor comun al lor este 18. Să se găsească cel mai mic multiplu comun.

13. Suma inverselor a două numere naturale este 2005, iar produsul lor 1005006. Să se afle suma celor două numere.

14. Două unghiuri A şi B au măsurile de $54^o55'$, respectiv de $56^o57'$. Să se suma dintre complementul unghiului A şi suplementul unghiului B.

15. Un călător a parcurs 24% dintr-un drum şi mai are de parcurs 130 km până la jumătatea drumului. Cât este lungimea totală a drumului ?

16. Un triunghi ascuțit unghic AOB are latua AO=3cm şi OB=40mm, iar mediatoarea laturii AB intersectează latura OB în punctul B. Să se afle perimetrul triunghiului AOB.

17. Se dă triunghiul ABC isoscel cu [AB]≡[AC]. Pe laturile [AB] şi [AC] se iau punctele D∈(AB), E∈(AC) astfel încât [BD]≡[CE]. Dacă BE∩CD ={P}, atunci să se arate că:
a) [BE]≡[CD].
b) AP este bisectoarea unghiului BAC.
c) dacă d(A,CD) = 3cm, d(A,BE) = ?

18. Să se afle un număr rațional pozitiv care, după ce se măreşte cu 16% iar rezultatul se micşorează cu 16%, se va micşora cu 16.

19. Determinați cea mai mică și cea mai mare fracție de forma: $\frac{\overline{x13a}}{\overline{y01b}}$,

unde $6/\overline{x13a}$ și $12/\overline{y01b}$.

20. Să se arate că fracția: $\frac{15^{n+2}:5^{n+2}+5\cdot 3^{n}+3^{n}}{25^{n+1}:5^{n+1}+5^{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}$, se simplifică cu 5 și apoi să se determine $n\in\mathbf{N}$, pentru care fracția este supraunitară.

21. Să se afle x din proporția: $\frac{2^{2012}+2^{2012}}{2^{2011}+2^{2011}}=\frac{1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}-3^{0}}{1,5\cdot x}$.

22. Un elev are pe un raft al bibliotecii 10 cărți de matematică, 25 de literatură și 15 de istorie. Care este probabilitatea ca o carte aleasă la întâmplare de pe acel raft să fie de matematică ?

23. O bancă acordă o dobândă anuală de 40%. Ce sumă trebuie să depună un client pentru ca după un an să aibă la bancă suma de 2800 lei ?

24. Pentru a obține din grâu făină se pierde 25% din cantitatea de grâu. Din ce cantitate de grâu se obțin 270 kg de făină ?

25. O cantină asigură hrana pentru 25 persoane timp de 30 zile. Cât timp va ajunge hrana dacă mai vin 5 persoane ?

26. Numerele a, b, c sunt direct proporționale cu primele numere naturale prime. Determinați a, b, c, știind că $a^{3}\cdot b\cdot^{2}c = 23040$.

27. O echipă de 8 muncitori pot termina o lucrare în 6 zile, lucrând câte 7 ore pe zi. În câte zile vor termina acea lucrare 14 muncitori care vor lucra 12 ore pe zi ?

28. Într-o fermă, 8 cai mănâncă în 7 zile 1400 kg de fân. În câte zile 15 cai vor mânca 3750 kg de fân ?

29. Date unghiurile AOB şi BOC adiacente. Ştiind că m($\hat{AOB}$)=42^0 şi m($\hat{BOC}$)=72^0, să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

30. Fie unghiurile MNP şi QNR adiacente. Dacă m($\hat{MNP}$)=62^0 şi unghiul format de bisectoarele celor două unghiuri are măsura de 48^0, să se afle m($\hat{QNR}$).

31. Dat un segment [AB] şi punctele C şi D situate de o parte şi de alta a dreptei AB, astfel încât ΔABC≡ΔBAD. Să se demonstreze că segmentele [AB] şi [CD] au acelaşi mijloc.

32. Date punctele A, B, C, D situate în această ordine pe dreapta ***d*** astfel încât (AB)≡(BC)≡(CD). Dacă O este un punct nesituat pe dreapta ***d*** şi (OB)≡(OC), să se arate că (OA)≡(OD).

Clasa a VII-a - algebră

1. Fie trei numere raționale a, b, c. Ştiind că b este media geometrică a numerelor a şi c iar $\{a, b\}$ sunt direct proporționale cu $\{2, 3\}$ aflați cât la sută din c reprezintă b?

2. Fie mulțimea $\{\sqrt{1};\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{n}\}$. Determinați numărul natural n astfel încât mulțimea să conțină 7570 de elemente numere iraționale.

3. Se dă şirul $a_1=\frac{6}{5}$; $a_2=\frac{7}{10}$; $a_3=\frac{8}{15}$; $a_4=\frac{9}{20}\ldots$
   a) Aflați termenul de pe poziția 2008.
   b) Calculați media geometrică a numerelor a_{1000} şi a_{1005}.

4. Numerele a, b, c sunt raționale nenule, direct proporționale cu 2,3,6. Demonstrați că $2a+3b+6c=7$ dacă şi numai dacă $a^2+b^2+c^2=1$.

5. Fie şirul de rapoarte egale: $\frac{a}{3c+b}=\frac{b}{a+3c}=\frac{3c}{a+b}$. Calculați valoarea expresiei A unde A=$\sqrt{\frac{c}{a+3b}+\frac{a}{3b+3c}+\frac{b}{a+3c}}$ şi determinați cel mai mic număr natural mai mare decât A.

6. Să se determine o fracție ştiind că dacă la numărător se adună 1, ea devine echiunitară, iar dacă se adaugă la numitor 2, ea devine echivalentă cu $\frac{1}{2}$.

7. Doi elevi au depus la CEC o sumă de bani. Dacă primul ar depune încă $\frac{3}{4}$ din suma sa, iar al doilea ar mai depune 20% din suma sa, atunci ar avea împreună 260 de lei. Dacă însă primul ar mai depune

$\frac{1}{4}$ din suma sa, iar celalalt ar rămâne cu aceeaşi sumă, atunci ei ar avea la CEC sume egale de bani. Ce sume au la CEC cei doi elevi?

8. Două brigăzi, executând o lucrare împreună, o pot termina în 45 de zile. Dacă prima brigada ar lucra 18 zile, iar a doua 12 zile s-ar efectua 30% din lucrare. În câte zile ar putea termina lucrarea fiecare brigadă, lucrând separat ?
9. Dacă $a + b + c = 2$ arătaţi că $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+3} + \sqrt{3c+5} \leq 9$.
10. Calculaţi numărul A=$\sqrt{2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} + ... + \sqrt{2^{2007}}$ şi arătaţi că A<2^{1005}.
11. Fie şirurile de numere naturale:

    3, 7, 11, ……., 4499 şi

    4507, 4503, ...15, 11

    a) Calculaţi suma numerelor din cele 2 şiruri.
    b) Face parte numărul 3529 din primul şir ?
    c) Câte numere sunt scrise în cele 2 şiruri ?
    d) Al câtelea element din şirul 1 este 1003 şi care este corespondentul său în al 2-lea şir dacă spunem că avem corespondentele: $3 \to 4507$, $7 \to 4503$, …….., $4499 \to 11$.
12. Dacă x, y sunt numere raţionale pozitive, nenule şi $\frac{x}{y} = 0{,}25$ atunci valoarea raportului $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + 4\sqrt{y}}$.
13. Un stilou costă 3000 de lei iar un caiet 1800 de lei. Dacă preţul stiloului se micşorează cu p% iar preţul caietului se măreşte cu q%, astfel încât preţul total al celor două obiecte să nu se modifice, aflaţi $\frac{p}{q}$. Cât reprezintă, în procente, p din q ?
14. a) Determinaţi n, număr natural nenul, dacă fracţia $\frac{2^{n+3} - 3 \cdot 2^n + 15}{335}$ este subunitară.

    b) Arătaţi că numărul $12 \cdot (3 \cdot \overline{ab} + 2) \cdot (\overline{ab} + 1) + 1$ este pătrat perfect.

15. a) Arătați că numerele $\dfrac{2n+3}{5}$ şi $\dfrac{8n+9}{5}$, *n* număr natural, nu pot fi simultan întregi.

b) Determinați valorile lui *x* real, pentru care $\dfrac{2x+1}{3x+1}$ şi $\dfrac{x-2}{4x+1}$ sunt simultan întregi.

16. Determinați numerele reale *x*, *y*, *z* de suma data S, ştiind că sunt direct proporționale cu: 0,(3); 0,1(6); 0,2(7). Care este cea mai mică valoare pentru S, număr natural, dacă *x*, *y*, *z* sunt numere naturale nenule.

17. Dacă numărul întreg *n* nu se divide cu 3 atunci care este restul împărțirii numărului $(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)$ la 3 ?

18. Un număr $a \in R - \{0, 1, 2, \ldots, 2006\}$, se ştie că este soluție a ecuației:
$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\ldots+\frac{1}{x-2006}=\frac{2007}{x}.$$
a) Arătați că $a \neq 1003{,}5$

b) Arătați că $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a-2}+\ldots+\dfrac{1}{a-2006}=1$.

19. Fie *m*, *n* numere naturale. Arătați că dacă $a = \dfrac{3n+4}{2n+3}+\dfrac{5m+8}{2m+3} \in N$ atunci $a = 4$.

20. Fie *a* şi *b* două numere naturale, $a > 4$, $b > 3$. Arătați că $2(a+b)+1 < \dfrac{a(b+3)}{2}+b < 2ab+1$.

21. a) Dacă $\dfrac{2a-b}{a+2b}=0{,}125$, calculați $\dfrac{3a+b}{a+b}$.

b) Dacă $a = 60\%\, b$, aflați cât la sută reprezintă $2a - b$ din $3a - b$.

22. Fie *a*, *b*, *c*, *d*, numere reale pozitive. Dacă
$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2,$$
atunci $a = b = c = d$.

23. Fie numerele a,b,c reale pozitive, astfel încât: $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Arătați că $a=b=c$.

24. Fie numerele: A = 2 + 4 + 6 +…+ 4024 şi $B=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2012}\right)$. Calculați: $\sqrt{A-2012^2\cdot B}$.

25. Arătați că mulțimea $A=\left\{\frac{2008}{5},\frac{2009}{6},\frac{2010}{7}\ldots\right\}$ conține un singur număr natural.

26. Demonstrați că:
$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\ldots\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<2$, oricare ar fi $n\in N^*$.

27. Fie $0,a_1a_2a_3\ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{6}+\frac{7}{13}$. Determinați a_{2012}.

28. Calculați: $\sqrt{\frac{12}{11}+\frac{13}{22}+\frac{14}{33}+\ldots\frac{110}{1089}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}\right)}$.

29. Fie $a, b, c \in Z^*$, cu proprietatea că $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{c^2+a^2}{b^2}$.

a) Arătați că $|a|=|b|=|c|$.

b) Aflați numerele a, b şi c ştiind că $ac-ab=50$.

30. Dacă $\frac{a}{b}=\sqrt{2012}$, calculați $\frac{3b}{a\sqrt{503}+3b}$.

31. Determinați numerele $\overline{ab}$ în baza 10 astfel încât $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}\in N$.

32. Determinați $x\in Z$ astfel încât $\sqrt{\frac{3x-5}{x+1}}\in Z$.

33. Să se determine valorile întregi ale lui x pentru care expresia:

$$E(x)=\frac{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7}$$ este

număr întreg.

34. a) Arătați că $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, oricare a, b două numere reale pozitive.

b) Fără a extrage rădăcina pătrată, arătați că $S < 4$, unde:

$$S=\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{90}}{19}+\frac{\sqrt{110}}{21}+\frac{\sqrt{132}}{23}.$$

35. Să se determine numerele reale x, y, z cunoscând că:

$x-y=\frac{y+z}{4}=\frac{z}{3}$, $x + 2z = 24$.

36. Determinați a şi b dacă $\overline{0,(ab)}+\overline{0,0(ab)}=0,2(3)$.

37. Ştiind că a% din 1200 este egal cu b% din 1500, calculați:

a) valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

b) cât la sută reprezintă $(a + b)$ din b.

c) de câte ori este mai mare b decât $a - b$.

38. Arătați că $\sqrt{2^{2n}\cdot 9^{n+1}+4^{n+2}\cdot 3^{2n}}\in$ N, unde $n\in$N.

39. Arătați că $\sqrt{5n+2}\notin$ Q, oricare $n\in$N.

40. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}+\frac{\sqrt{4\cdot 5}}{9}+\frac{\sqrt{5\cdot 6}}{11}<\frac{5}{2}.$$

41. Rezolvați ecuația: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{x(x+1)}=\frac{99}{100}$, x$\in$N.

42. Fie a, b, c trei numere naturale nenule astfel încât: $\frac{2a-b}{c} = \frac{2b-c}{a} = \frac{2c-a}{b}$. Arătați că fiecare dintre ele este media aritmetică a celorlalte două.

43. Arătați că oricare ar fi patru numere raționale raționale pozitive cu proprietatea că fiecare este media aritmetică a celorlalte trei, atunci cele patru numere sunt egale.

44. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (x+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2012}$$

45. Aflați numărul $\overline{xy}$ dacă $1 + 3 + 5 + ...+ (2x + 2y - 1) = \overline{xy}$.

46. Fie numerele $a = 1\cdot 7 + 2\cdot 8 + ... + 32\cdot 38$ și $b = 32\cdot 41 + 31\cdot 40 + ... + 2\cdot 11 + 1\cdot 10$. Calculați $b - a$.

47. Fie numerele raționale nenule a, b, c astfel încât $a + b$, $b + c$ și c să fie direct proporționale cu 10, 3 și $\frac{2}{3}$.
    a) Aflați a, b și c dacă $a + 2b = 3c + 1$.
    b) Aflați a, b, c astfel încât $a\cdot b\cdot c$ să fie natural și cât mai mic posibil.

Clasa a VII-a - geometrie

1. În triunghiul ABC, cu M∈(BC), astfel încât BM = 2MC, E este mijlocul laturii AB, F este mijlocul segmentului EC. Arătați că punctele A, F, M sunt coliniare.

2. În triunghiul ABC dreptunghic în A, AB=AC=6. Pe latura BC se iau punctele M, N, P astfel încât (BM)≡(MN)≡(NP)≡(PC), iar punctul T este mijlocul lui (AB).
   a) Demonstrați că triunghiul TNC nu poate fi isoscel.
   b) Calculați aria triunghiului TMP.
   c) Calculați perimetrul triunghiului TMP.

3. Fie triunghiul ABC în care (AD este bisectoarea $\angle$A, D$\in$(BC). Pe [AB si [AC se iau punctele E si F astfel incat (AE)$\equiv$(DC) si (AF)$\equiv$(BD).
   a) Arătați că triunghiurile AEF şi ABC sunt asemenea.
   b) Dacă EF$\cap$BC= {R} atunci arătați că triunghiul MRD este isoscel,unde {M}=AD$\cap$EF.

4. Fie rombul ABCD cu m($\angle$A)$\prec$m($\angle$B). Din punctul B se construiesc perpendiculare pe AD respectiv CD care intersectează dreapta CD respectiv AD în punctele E şi F.
   a) Demonstrați că EF paralela cu AC
   b) Demonstrați că triunghiul BEF este isoscel.
   c) Dacă în plus rombul are unghiul A cu măsura de 60^0 iar latura de 4 cm , calculați perimetrul triunghiului BEF.

5. Fie triunghiul ABC şi punctele: M pe (AB) cu AM=$\frac{1}{3}$AB şi P pe (CM) astfel ca MP=AM. Dacă m($\angle$CMB)=60^0, demonstrați că BP$\perp$MC.

6. În trapezul ABCD (AB||CD; AB>CD), avem MN||AB, M$\in$(AD) şi N$\in$(BC), MP||BC şi NQ||AD, unde P, Q$\in$BC. Demonstrați că [AP]$\equiv$[BQ].

7. În triunghiul ABC se iau punctele M şi N, M$\in$(AB), N$\in$(AC) astfel încât [MB]$\equiv$[NC]. Dacă triunghiul ABC este isoscel, demonstrați că CM, BN şi bisectoarea (AD, D$\in$(BC) sunt concurente.

8. Fie triunghiurile: ABC dreptunghic în B cu AB=3 cm şi triunghiul echilateral ADC de latura 6 cm.
   a) Demonstrați că ABCD este un trapez dreptunghic şi calculați-i aria şi perimetrul.
   b) Calculați ariile triunghiurilor BOA şi DOC unde AC$\cap$BD={O}.

9. Diagonalele unui trapez isoscel ABCD se intersectează în O. Distanțele de la acest punct la bazele trapezului sunt direct proporționale cu numerele 8,5 şi 3,5 iar $\frac{2}{5}$ din din distanța la baza mare întrece cu 4 cm, 40% din distanța la baza mică.
   a) Aflați cele două distanțe.

b) Dacă baza mică are 14 cm, laturile neparalele au câte 26 cm şi perimetrul este de 100 cm, aflați unghiul dintre o diagonală şi baza mare, apoi demonstrați că diagonalele sunt perpendiculare.

10. Un teren are forma de trapez dreptunghic. Baza mare, baza mică şi latura oblică sunt direct proporționale cu numerele 7, 4 şi 5 iar suma lor este 80 hm. Acest teren este cultivabil, în afara de 2ha ocupate cu diferite constructii. Suprafața cultivabilă este împărțită în trei loturi: primul ocupă 45% din suprafață cultivabilă, iar al doilea 3/5 din rest. Aflați, în hectare:
    a) Aria întregului teren.
    b) Ariile celor trei loturi cultivate.

11. Într-un paralelogram ABCD, cu aria de 45 de m^2, se dă AB=10 m, şi AD=6m.
    a) Cu cât creşte aria paralelogramului dacă latura AD creşte cu 2m iar AB rămâne constantă?
    b) Cu cât creşte aria paralelogramului dacă latura AB creşte cu 2m, iar AD rămâne constantă?
    c) Calculați aria rombului cu latura de 2m şi măsurile unghiurilor aceleaşi ca ale paralelogramului.

12. Fie ABC un triunghi oarecare, iar E, F, G mijloacele laturilor AB, BC, CA. Dacă D este piciorul perpendicularei din A pe BC, să se demonstreze că DE=FG.

13. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral ABC astfel încât $m(\angle MBC)=m(\angle MCB)=20^0$. Să se calculeze măsura unghiului AMB.

14. În triunghiul oarecare ABC, AD, BE, CF sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului, unde $D\in(BC)$, $E\in(AC)$, $F\in(AB)$. Să se demonstreze că suma măsurilor unghiurilor $\angle ADB$, $\angle BEC$, $\angle CFA$ este egala cu 270^0.

15. Fie M un punct oarecare luat pe latura BC a paralelogramului ABCD, N un punct pe AM. Demonstrați că ariile triunghiurilor DMN şi BCN sunt egale.

16. Înălțimea unui triunghi este egală cu 4. Ea împarte baza în două părți care se găsesc în raportul $\frac{1}{8}$. Să se calculeze lungimea segmentului

paralel cu înălțimea şi care împarte triunghiul în două părți de arii egale.

17. Fie ABCD un dreptunghi şi punctele M∈(AB), N∈(AD), astfel încât $AM=\frac{1}{2}AB$, $AN=\frac{1}{3}AD$, determinați raportul dintre aria triunghiului CMN şi aria dreptunghiului.

18. Considerăm triunghiul ABC şi M∈(CB). Paralela prin M la AB intersectează AC în F, iar paralela prin M la AC intersectează AB în E. Arătați că (ME)≡(MF) dacă şi numai dacă ∠MAB≡∠MAC.

19. În patrulaterul ABCD cu latura AD=24 cm, notăm G_1 centrul de greutate al triunghiului ABC şi G_2 centrul de greutate al triunghiului BCD.
a) Arătați că $G_1G_2 \parallel AD$.
b) Calculați lungimea segmentului G_1G_2.

20. În triunghiul ABC, (CD, (BE sunt bisectoarele unghiurilor ∠ACB, ∠ABC, D∈(AB), E∈(AC). Ştiind că $AD\cdot AC=AE\cdot AB$, să se determine natura ΔABC.

21. Fie ABCD paralelogram, $AC=2\cdot AD$. Se notează N mijlocul segmentului DC, M piciorul bisectoarei ∠DAC, M∈(DC).
a) Ştiind că $BN\cap AC=\{P\}$, arătați că MP||BD.
b) Dacă $PM\cap AD=\{R\}$, arătați că $BC=2\cdot DR$.

22. Fie dreptunghiul ABCD, AB=a, BC=b, a>b. Se consideră P mijlocul lui BC. Fie Q∈(AB) astfel încât suma DQ+PQ să fie minimă.
a) Determinați AQ.
b) Determinați relația între *a* şi *b* astfel încât PQ⊥DQ.

23. În triunghiul ABC, $m(\angle A)=90^0$, se construiesc AD⊥BC, DE⊥AB, DF||AB, D∈(BC), E∈(AB), F∈(AC). Considerăm M, N mijloacele segmentelor AB respective AC. Demonstrați că:
a) AD = EF.
b) MD ⊥ DN.
c) ∠DNM≡∠MAD.

24. Fie ABCD trapez dreptunghic, AB||CD, AD⊥AB, AD=AB+CD şi M∈(AD) astfel încât AM= AB. Arătați că:
a) ΔBMC este dreptunghic.

b) Dacă N este mijlocul (BC), $MC \cap DN = \{P\}$, $AN \cap MB = \{Q\}$, atunci MPNQ este dreptunghi.

25. Fie D un punct în interiorul triunghiului ABC. Prin D se duc EF||AB, GH||BC, MN||AC, unde $E,N \in (BC)$, $H,F \in (CA)$, $M,G \in (AB)$. Să se arate că $\frac{EF}{AB} + \frac{GH}{BC} + \frac{MN}{AC} = 2$.

26. În triunghiul ABC, AB=2·BC se consideră medianele AD, BE care se intersectează în G, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$. Paralela prin G la BC intersectează AB în H, pe AC în F, $BF \cap AD = \{O\}$.
a) Demonstrați că HF = HB.
b) Calculați valoarea raportului $\frac{OD}{OA}$.

27. Fie M şi N mijloacele laturilor [DC] şi respectiv [AD] ale pătratului ABCD iar $CN \cap BM = \{P\}$. Arătați că: $BM \perp CN$.

28. În triunghiul ABC punctul N este mijlocul medianei [AM]. Dacă $\{D\} = AC \cap BN$ şi BN=3 cm, să se calculeze lungimea segmentului [ND].

29. Fie [BM] mediană în ΔABC. Dacă AD este mediatoarea segmentului [BM], $D \in (BM)$, $AD \cap BC = \{P\}$ iar MT || AP unde $T \in [BC]$, să se arate că:
a) Δ BMTeste dreptunghic;
b) [MP] ≡ [TC].

30. În rombul ABCD, punctul $E \in (AD)$ astfel încât $BE \perp AD$. Dacă latura rombului şi segmentul BE au lungimi egale cu 10 cm respectiv 8 cm, calculați diagonalele rombului.

31. În triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 90^0, iar E şi F sunt mijloacele laturilor [AB], respective [BC]. Ştiind că AC = 4cm şi că $AF \perp CE$, aflați lungimile laturilor AB şi BC.

32. Fie pătratul ABCD şi E mijlocul laturii [AB]. Dreapta DE intersectează perpendiculara în A pe [AC] în punctul F. Să se arate că punctele C, B, F sunt coliniare.

33. Să se demonstreze că triunghiul de laturi *a*, *b* şi *c* care verifică relația $\frac{a+c}{b} + \frac{b}{a+c} = \frac{2a}{b}$ este triunghi dreptunghic.

34. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Se notează h_a, h_b şi h_c lungimile înălțimilor corespunzătoare laturilor a, b, c. Dacă $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$ atunci triunghiul dat este triunghi dreptunghic.

35. Demonstrați că mijloacele laturilor unui trapez isoscel sunt vârfurile unui romb.

36. În triunghiul ABC cu BC=2AB, (BM este bisectoarea unghiului B ($M\in(AC)$), N este mijlocul laturii [BC] iar S este simetricul lui B față de A. Demonstrați că punctele S, M, N sunt coliniare.

37. În paralelogramul ABCD cu AB=25cm şi BC=20cm se consideră $M\in(AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MC}=\frac{2}{3}$, MP||AB, $P\in(BC)$, MQ||BC, $Q\in(CD)$. Să se calculeze perimetrul paralelogramului MPCQ.

38. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 12 cm, măsura unghiului dintre mediană şi înălțimea dusă din vârful unghiului drept este de 30^0. Aflați lungimea înălțimii.

39. Se dă triunghiul ABC cu AB=2cm, AC= $2\sqrt{2}$ cm, BC= $2\sqrt{3}$ cm:
    a) Să se afle măsura unghiului A;
    b) Dacă $AD\perp BC$, $D\in BC$, $DE\perp AB$, $E\in AB$, $DF\perp AC$, $F\in AC$ iar $AD\cap EF=\{O\}$, să se calculeze lungimea segmentelor [EF], [CE], [CO].

40. Printr-un punct $M\in(AB)$ a unui trapez ABCD (AB||CD) se duc MP||BC, $P\in AC$ şi MN||AD, $N\in BD$. Să se demonstreze că:
    a) $\frac{AP}{AC}+\frac{BN}{BD}=1$;
    b) paralela prin P la AD şi paralela prin N la BC se intersectează într-un punct E situate pe (DC).

41. Într-un trapez isoscel ABCD cu AB||CD şi AB>CD se notează cu M şi N mijloacele diagonalelor [AC] şi [BD] şi cu E piciorul înălțimii din C. Stabiliți natura patrulaterului MNBE.

42. Pe latura [AB] a unui triunghi ABC se consideră punctual M astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$. Paralela prin A la BC se intersectează cu MC în N,

iar paralela prin M la BC intersectează dreapta AC în P. Determinați lungimea segmentului [AN], ştiind că PM=2,4 cm.

43. Fie ABCD un paralelogram şi $E \in (BC)$. Fie $AE \cap CD = \{F\}$. Demonstrați că ABCD ese romb dacă şi numai dacă $AB^2 = BE \cdot DF$.

44. Fie M punctul de intersecție al înălțimii AD cu bisectoarea CE în triunghiul ABC dreptunghic în A, $D \in (BC)$, $E \in (AB)$.
 a) Demonstrați că ΔAEM este isoscel.
 b) Dacă $EF \perp BC$, $F \in (BC)$, demonstrați că $AF \perp CE$.
 c) Stabiliți natura patrulaterului AEFM.

45. Se consideră un romb ABCD cu măsura unghiului A de 60^0. Se notează cu E şi respectiv F mijloacele laturilor AD şi respectiv BC şi punctele B' şi D' sunt simetricele punctelor B şi D față de dreptele AD şi respectiv BC.
 a) demonstrați că BB'DD' este paralelogram;
 b) calculați unghiurile patrulaterului BB'DD';
 c) calculați cât la sută din aria patrulaterului BB'DD' reprezintă aria triunghiului BED?

46. În triunghiul ABC se consideră E mijlocul segmentului [AB] şi $S \in BC$ cu $\frac{BS}{SC} = \frac{2}{3}$. Fie $\{M\} = ES \cap AC$. Determinați raportul $\frac{AM}{AC}$ şi lungimea segmentului [MC] dacă AC=10cm.

47. Fie paralelogramul ABCD şi punctul E exterior. Dacă $EB \cap AD = \{M\}$, $EB \cap CD = \{N\}$, $ED \cap AB = \{P\}$, $ED \cap BC = \{Q\}$. Demonstrați că $MP \| NQ$.

48. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^0$, $m(\angle C) = 30^0$, AB = 3cm. Fie $D \in (AB$ astfel încât $m(\angle BDC) = m(\angle ACB)$. Să se calculeze aria triunghiurilor BDC şi DAC.

49. În paralelogramul ABCD, fie N mijlocul segmentului [CD] şi $\{P\} = AN \cap BD$, $\{Q\} = BN \cap AC$. Arătați că $PQ \| AB$.

50. Fie un trapez isoscel MNPQ ($MN \| PQ$), MN>PQ, cu lungimile laturilor neparalele egale cu lungimea bazei mici care are 6cm şi unghiul ascuțit de 60^0, $MP \cap NQ = \{O\}$.
 a) să se determine lungimea bazei mari a trapezului;
 b) să se determine măsura unghiului format de diagonale;
 c) ştiind că înălțimea trapezului este $3\sqrt{3}$, să se afle aria Δ MON.

51. Fie ABCD un trapez dreptunghic cu baza mare AB de 40 cm, înălțimea AD de 20 cm şi latura neparalelă BC de 25 cm.
   a) dacă [BD este bisectoarea unghiului $\angle$ABC, calculați perimetrul şi aria trapezului ABCD;
   b) calculați aria triunghiului BCD;
   c) calculați aria triunghiului ABC.

Clasa a VIII-a - algebră

1. Fie S = $\frac{1}{80}+\frac{1}{81}+...+\frac{1}{120}$. Arătați că S$\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

2. Fie $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
   a) Calculați x^2
   b) Arătați că: $a+\frac{1}{a}\geq 2, \forall a>0$
   c) Arătați că: $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x\geq 2$.

3. Determinați x∈IR: $\frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{34+24\sqrt{2}}}{x}$.

4. Determinați elementele mulțimii:
   $$A=\left\{x\in Z\left|\frac{\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{12-2\sqrt{35}}}{x+3}\in Z\right.\right\}.$$

5. Determinați x∈R din: $\frac{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{x}=\frac{\sqrt{28+16\sqrt{3}}}{4\sqrt{5}}$.

6. Fie mulțimile: $\begin{cases}A=\{x\in Z\mid |x+1|-2=1\}\\ B=\left\{x\in Z\left|\frac{3x+4}{x+3}\in Z\right.\right\}\end{cases}$. Calculați A∩B; A–B și B–A.

7. Aflați a∈Z pentru care $\frac{4a}{5}\in\left(\frac{a-7}{2},\frac{2a+5}{6}\right)$.

8. Aflați x∈R știind că: $[2x]+\{x+3\}=8{,}2$, $[a]$ – partea întreagă a numărului “a”, $\{a\}$ – partea fracționară a număr. “a”.

9. Fie x,y∈R astfel încât $3x^2+5y^2-12x+30y+57=0$. Calculați $(9y+13x)^{2012}$.

10. Determinați x∈R astfel încât: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$.

11. Rezolvați ecuația $[x]+2\cdot\{x\}=17,8$

12. Determinați x∈R astfel încât: $[2x]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]=2$.

13. Rezolvați ecuația $2[x]+3\{x\}=12,6$

14. Fie $I_x=\left[4-\frac{2}{x-1},6+x\right]$, x∈Z. Determinați intervalele I_x pentru care capetele intervalului sunt numere întregi.

15. Fie $A=\left\{x\in R \mid |2x-3|<2\right\}$; $B=\left\{y\in R \mid |3y-2|\leq 3\right\}$. Aflați A∪B; A∩B; A–B.

16. Fie $A=\sqrt{(2x+y-10)^2}+\sqrt{(2x+y+15)^2}$, x,y∈R. Arătați că A este pătrat perfect ştiind că x ∈ [-2, 3] şi y ∈ [-3, 4].

17. Rezolvați inecuația $3(x+1)>(\sqrt{3}+2)(x+1)$

18. Calculați aria triunghiului cu laturile de lungimi a, b, c ştiind că: $a^2+b^2+c^2=2\left(\sqrt{7}a+\sqrt{5}b+2\sqrt{3}c-12\right)$

19. Rezolvați ecuația: $|2x-3|=a$, unde: $a=|x+y-9|+\sqrt{(x+y+8)^2}$, x∈[-3, 2], y∈[-5, 7].

20. Arătați că $\forall x,y>0$ avem :

a) $\frac{2}{xy}\leq\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

b) $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$

c) $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$

21. a) Demonstrați că $\forall\, x \in R - \{0,-1,-2,-3\}$ avem:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{2 \cdot \left(x^2 + 3x + 3\right)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

b) Calculați: $E = \frac{14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{26}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{42}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} +$

$+ \ldots + \frac{20606}{100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}$.

22. Fie $F(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Arătați că F(x) $\vdots$ 2, $\forall$ x$\in$N.

b) Calculați $\frac{1}{F(3)} + \frac{1}{F(4)} + \frac{1}{F(5)} + \ldots + \frac{1}{F(101)}$.

23. Demonstrați că $\sqrt{7n+3} \in R - Q, \forall\, n \in N$.

24. Determinați elementele mulțimii A unde:

$$A = \left\{ x \;\middle|\; x = a + b + c \text{ si } \sqrt{\overline{0,ab(c)} + \overline{0,ca(b)} + \overline{0,bc(a)}} \in Q \right\}.$$

25. Rezolvați în R ecuația:

$$(x^2 + 4x + 3)^3 + (2x^2 - 3x - 5)^3 = (3x^2 + x - 2)^3$$

26. Determinați numerele naturale ***n*** pentru care:

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} \in N.$$

27. Rezolvați ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2010.$$

28. Stabiliți intervalele din care fac parte numerele reale x, y, z dacă: $x^2+4y^2+z^2 - 6x - 4y - 4z+10 = 0$.

29. Fie x,y$\in$R astfel încât $x^2 + y^2 - 2x\sqrt{5} - 2y\sqrt{3} + 8 = 0$. Arătați că

$$(x-y) \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{y}\right) = 2.$$

30. Aflați a∈Z dacă $\frac{4a-5}{3} \in \left(\frac{a-1}{2}; \frac{a+4}{5}\right)$.

31. Fie expresia:

$$E(x)=\left[\frac{8}{x^2-9}-\frac{x+2}{x-3}+\left(\frac{4x+7}{x+2}-3\right)\cdot\frac{x^2-4}{x^2+4x+3}\right]\cdot\frac{x^2-5x+6}{4-5x}.$$

a) Stabiliți domeniul maxim de definiție (D).

b) Rezolvați ecuația $E(x)\cdot\frac{2x+6}{x}=\frac{8}{3}$.

c) Arătați că $E(x)\cdot\left(x^2+x-6\right)+1>0$, $\forall x\in D$.

d) Determinați x∈Z astfel încât E(x)∈Z.

32. Fie expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-4}{x^2+9x+20}-\frac{x+3}{x-5}-\frac{2(x-1)}{25-x^2}\right):\frac{x+3}{x-5}$$

a) Stabiliți domeniul maxim de definiție al expresiei.

b) Rezolvați ecuația $E(x)=\frac{-x^2+6x-9}{x+5}$.

c) Alfați x∈Z astfel încât $E(x)\in Z$.

d) Aflați x∈R astfel încât $-3\le E(x)\le 1$.

33. Fie $f: R\to R, f(x)=ax-3$.

a) Determinați $a\in R$ astfel încât aria suprafeței determinate de reprezentarea grafică a funcției şi axele de coordonate să fie $\frac{9}{4}$.

b) Pentru a determinat calculați distanța de la M(0,3) la reprezentarea grafică a funcției.

34. Determinați funcția liniară $f: R\to R$ astfel încât:
$f(2x-3)=6x+8-f(3)$.

35. Determinați funcția liniară $f: R\to R$ astfel încât:
$f(2x+3)+f(4-4x)=-2x+9$.

36. Determinați funcțiile liniare f, g : R → R, cu proprietatea că:
$$2g(2-x)+3f(2x+1)=22x+9$$
$$g(2-x)-2f(2x+1)=-10x-13$$

37. Determinați funcția f: R → R ce satisface relația $f(2-3x)=2-9x-f(2)$ şi apoi trasați graficul.

38. Demonstrați că:

a) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}, a \neq b, a, b > 0$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{2012}}+\sqrt{\dfrac{2}{2011}}+\sqrt{\dfrac{3}{2010}}+\ldots+\sqrt{\dfrac{2010}{3}}+\sqrt{\dfrac{2011}{2}}+\sqrt{\dfrac{2012}{1}} > 2012$

39. Fie f: R → R o funcție care verifică egalitatea: $(3x-1)^2 = 6xf(x)-2f(x)+f^2(x)$, $\forall x \in$ R. Determinați $f(x)$ apoi calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției şi axele de coordonate.

40. Fie mulțimile $\begin{cases} A=\left\{x \in Z \,\middle|\, \dfrac{3x+2}{x-2} \in Z\right\} \\ B=\left\{x \in Z \,\middle|\, \left||x-1|-6\right|=3\right\} \end{cases}$. Calculați A∩B.

<u>**Clasa a VIII-a - geometrie**</u>

1. Fie triunghiul echilateral ABC şi S un punct exterior planului (ABC) astfel încât [SA] ≡ [SB] ≡ [SC]. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] şi măsura unghiului format de dreptele AC şi SM este de 60 de grade, demonstrați că SA⊥SM.

2. Se consideră dreptunghiul ABCD în care AB = 2a, BC = 4a. În punctul O de intersecție a diagonalelor dreptunghiului se duce VO⊥ (ABCD), astfel încât VO = a. Se notează cu α, β, γ unghiurile formate de planele (VAB), (VBC), respectiv dreapta VA, cu planul (ABC). Să se calculeze $\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\text{tg}^2\gamma$.

3. Se dau punctele necoplanare V, A, B, C, D. Dacă $VB \perp CD$, $VD \perp BC$, $VA \perp BD$, să se arate că picioarele perpendicularelor duse din C şi A pe BD coincid.

4. Pe planul paralelogramului ABCD se ridică perpendicularele în punctele A şi B pe care se consideră, de aceeaşi parte a planului paralelogramului, punctele A_1, respectiv B_1, astfel încât $AA_1 = BB_1$. Fie $P \in (A_1B_1)$, $Q \in (CD)$ încât $(A_1P) \equiv (CQ)$. Arătați că dreptele A_1C, B_1D, PQ sunt concurente.

5. Dreptele *a* şi *b* concurente în O situate înafara unui plan α formează cu planul α unghiuri de 30 de grade, respectiv 45 de grade, iar planul dreptelor (*a*, *b*) formează cu α un unghi de 60 de grade. Să se afle unghiul dreptelor *a* şi *b*.

6. Dintr-un punct A exterior unui plan se duc perpendiculara AO şi două oblice AB, AC (O, B, C aparțin planului dat). Fie H şi H_1 ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv OBC. Arătați că dreapta HH_1 este perpendiculară pe planul ABC.

7. Pe planul pătratului ABCD de latură a se duce în punctul A perpendiculara $AO = a\sqrt{2}$. Proiecțiile lui A pe planele OBC şi OCD se notează respectiv cu M şi N. Să se calculeze măsura unghiului diedru format de planele AMN şi ABCD.

8. Se dă un dreptunghi ABCD. De aceeaşi parte a planului ABCD se duc perpendicularele AA', BB', CC', DD' pe planul ABCD astfel ca AA'= BB'= CC'= DD'= AI, unde I este piciorul perpendicularei din A pe BD. Să se arate că orice punct al segmentului B'C este egal depărtat de dreptele BD şi A'C'.

9. Triunghiul isoscel ABC cu unghiul A de 90^0 se îndoaie de-a lungul liniei mijlocii MN (M este mijlocul laturii AB, iar N al laturii AC). Arătați că dreapta de intersecție a planelor AMB şi ANC este perpendiculară pe dreapta de intersecție a planelor AMN şi ABC.

10. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu măsura unghiului B de 30 de grade şi AC = *b*. În punctul B se duce perpendiculara pe planul (ABC), pe care se ia punctul M astfel ca BM = *b*. Arătați că AC este perpendiculară pe planul (MAB). Calculați aria triunghiului MAC.

11. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare, iar M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA. Arătați că planele ABP, BCQ, CDM şi DAN au un punct în comun.

12. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB \perp BD$, $m(\angle CBD) = 120^0$ şi M mijlocul segmentului CD. Să se demonstreze că $AM \perp BD$ dacă şi numai dacă $BC = 2BD$.

13. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) şi punctul $D \notin (ABC)$ astfel încât $m(\angle DAB) = m(\angle DAC) = 90^0$. Fie $E = pr_{BD}A$ şi $F = pr_{CD}A$. Arătați că EF || (ABC).

14. Dreptunghiul ABCD şi triunghiul ABE cu AE = 13cm, AB = 14cm, EB = 15cm şi BC = 12cm, sunt situate în plane diferite. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABE şi $EH \perp BC$, aflați distanța de la H la (EDC).

15. Fie triunghiul OAB isoscel (OA=OB) şi bisectoarea sa OC ($C \in AB$). Arătați că proiecția triunghiului pe un plan paralel cu OC este un triunghi $O_1A_1B_1$ ce are bisectoarea O_1C_1 paralelă cu OC.

16. Fie triunghiul echilateral ABC şi S un punct exterior planului (ABC) astfel încât SA = SB = SC. Dacă M este mijlocul segmentului BC şi măsura unghiului format de dreptele AC şi SM este de 60^0, demonstrați că dreptele SA şi SM sunt perpendiculare.

17. Pe planul pătratului ABCD cu $AB = 3a$ se ridică de aceeaşi parte a planului perpendicularele AT şi RC. Dacă $S \in (AD)$ cu $AS = a$ şi $TA \cdot RC = \frac{27a^2}{10}$, să se arate că planele TSB şi RSB sunt perpendiculare.

18. Fie O centrul pătratului ABCD de latură a, iar M, N mijloacele segmentelor DO respectiv BC. Pe perpendiculara în O pe planul pătratului se consideră punctul E astfel încât $EA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ cm. Calculați distanța de la punctul E la dreapta AN.

19. Fie ABCD un tetraedru cu proprietatea că $AC \perp BD$, $AB = CD = a$ cm şi $AD = BC = b$ cm. Demonstrați că $a = b$.

20. Fie VABCD o piramidă patrulateră şi M, N, P, Q proiecțiile vârfului V pe bisectoarele unghiurilor VAB, VBC, VCD, respectiv VDA. Arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

21. Fie ABCD un paralelogram şi α un plan ce conține diagonala BD a paralelogramului. Dacă M şi N sunt, respectiv, proiecțiile punctelor A şi C pe planul α, arătați că (AM) ≡ (CN).

22. Triunghiurile ABC şi DBC dreptunghice în A, respectiv D, sunt situate în plane diferite iar triunghiul DAB este echilateral. Ştiind că AB = 30 cm, AC = 40 cm, se cere:

    a. să se arate că triunghiul DAC este isoscel

    b. să se afle distanța de la C la planul ABD.

23. Pătratele ABCD şi BCEF sunt situate în plane perpendiculare. Dacă M este mijlocul segmentului BC, iar AB = 10 cm:

    a. arătați că triunghiul DMF este isoscel

    b. calculați distanța de la mijlocul segmentului DF la planul BCE

    c. aflați măsura unghiului format de dreptele BD şi FC.

24. Se consideră trapezul ABCD (AB||CD) şi rombul ABEF situate în plane diferite. Fie $\{K\}=AC\cap BD$ şi $\{L\}=CF\cap DE$. Calculați distanța KL ştiind că AB = 6 cm şi CD = 12 cm.

25. Fie ABCD un tetraedru, iar P un punct exterior acestuia. Arătați că, dacă TE, TF, TG, TH sunt bisectoarele unghiurilor ATB, ATC, CTD, respectiv ATD ($E\in AB$, $F\in AC$, $G\in CD$, $H\in AD$), atunci E, F, G, H sunt coplanare.

26. Să se demonstreze că, dacă într-un tetraedru ABCD bisectoarele unghiurilor BAC, BDC întâlnesc muchia BC în acelaşi punct M, atunci şi bisectoarele unghiurilor ABD, ACD întâlnesc muchia AD într-un acelaşi punct N.

27. Să se demonstreze că proiecția pe un plan α a unui unghi drept AOB, pentru care latura AO este paralelă cu planul α, este tot un unghi drept.

28. Să se demonstreze că într-un paralelipiped dreptunghic diagonalele sunt concurente.

29. Să se determine din mulțimea paralelipipedelor dreptunghice având lungimea diagonalei dată, acel paralelipiped al cărui arie totală este maximă.

30. În cubul ABCDA'B'C'D' se consideră un punct T pe (AO) unde O este centrul feței BCC'B'. Aflați unghiul dreptelor BD' şi TB'.

31. În cubul ABCDA'B'C'D', M şi N sunt mijloacele muchiilor AA' şi CC'. Fie $D'M \cap DA = \{P\}$, $D'N \cap DC = \{Q\}$. Să se arate că:

   a. punctele P, B, Q sunt coliniare

   b. patrulaterul BMD'N este un romb.

32. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu O_1 centrul feței ABCD, O_2 centrul feței A'B'C'D' şi O_3 centrul feței ADD'A'.

   a. Să se arate că planele $O_1O_2O_3$ şi ABB'A' sunt paralele.

   b. Dacă AB = 2a, să se calculeze raportul dintre aria triunghiului $O_1O_2O_3$ şi aria ABB'A'.

33. Fie un cub cu baza ABCD, iar VA muchia cubului perpendiculară pe bază. Punctul A se proiectează pe VB, VC, VD, respectiv în A_1, A_2, A_3. Să se arate că:
   a) dreapta CV este perpendiculară pe planul $A_1A_2A_3$;
   b) unghiurile AA_1A_2, AA_3A_2 sunt drepte.

34. Se dă cubul ABCDA'B'C'D'. Să se determine măsura unghiului format de dreptele D'C şi A'C'.

35. Se dă un cub cu muchia 1 cm. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică sau egală cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ cm.

36. În cubul ABCDA'B'C'D', M este piciorul perpendicularei din B pe diagonala A'C şi punctul P este astfel situat încât C să fie mijlocul segmentului DP. Demonstrați că punctele M, N, P sunt coliniare.

37. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia AB=2*a*, iar M, N, P mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv DD'. Să se determine perimetrul şi aria secțiunii formate de planul (MNP) în cubul dat.

38. Într-un cub ABCDEFGH, P este mijlocul laturii AB şi Q punctul de intersecție dintre BG şi CF. Să se demonstreze că AG este paralelă cu planul CFP, iar HQ este perpendiculară pe planul CFP.

39. Fie M, N mijloacele muchiilor BC, DD' ale unui cub ABCDA'B'C'D' şi $\{P\}=DM\cap AC$, $\{Q\}= CN\cap DC'$. Demonstrați că PQ||(ABC').

40. Se consideră prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C'. Să se demonstreze că planele (ABC') şi (BCA') sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $AA'= AB\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

41. Să se demonstreze că, într-o prismă triunghiulară regulată, dreptele care unesc câte un vârf al unei baze cu mijlocul laturii opuse a celeilalte baze sunt concurente.

42. Fie prisma triunghiulară dreaptă ABCA'B'C' cu bazele triunghiuri echilaterale. Dacă AB = 12 cm, AA'= $6\sqrt{6}$ cm şi $\{O\}= BC'\cap B'C$, calculați măsura unghiului dintre AO şi A'B' şi tangenta unghiului dintre AO şi (ACB').

43. Într-o prismă patrulateră regulată, aria unei fețe laterale este $a^2\sqrt{2}$. Aflați aria unei secțiuni diagonale.

44. Aria totală a unei prisme triunghiulare regulate ABCA'B'C' este egală cu $72\sqrt{3}$ cm^2. Ştiind că distanța de la centrul O al feței ABB'A' la planul (BCC') este egală cu 3 cm, determinați volumul prismei.

45. Ştiind că distanța dintre mijloacele unei diagonale a unui cub şi o diagonală a unei fețe laterale este de 3 cm, aflați aria şi volumul cubului.

46. Să se arate că dacă într-un paralelipiped dreptunghic diagonala d este mai mică sau egală cu 1, atunci aria totală a paralelipipedului este mai mică sau egală cu 2.

47. Diagonala AC' a paralelipipedului dreptunghic ABCDA'B'C'D' formează cu muchiile AB, AD şi AA' unghiuri având măsurile respectiv α, β, γ. Arătați că $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}\geq 9$.

48. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' şi fie M, N, P mijloacele muchiilor AA', B'C', CD. Arătţi că triunghiul MNP este echilateral dacă şi numai dacă ABCDA'B'C'D' este cub.

49. În prisma triunghiulară dreaptă ABCDEF fie M şi N picioarele perpendicularelor duse din D si E pe bisectoarele unghiurilor BAD şi CBE. Demonstrați că MN || (ABC).

50. Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară dreaptă care are baza triunghiul ABC cu m($\angle$ACB)=30^0, m($\angle$BAC)=90^0, AB=a, AA'=a.

   a. arătați că AB' $\perp$ BC' şi B'D $\perp$ BC', unde D este proiecția punctului A pe BC;

   b. notăm H intersecția dreptelor B'D şi BC' şi fie HE $\perp$ AB', E$\in$AB'; arătați că E este mijlocul segmentului AB'.

Indicații şi răspunsuri

Clasele a III-a şi a IV-a

1. 100
2. ***a*** = 120
3. 3x [(90:45) x (90+45)] – 3x[(90+45) – (90 – 45)] =
   = 3x(2 x 135) – 3x(135 – 45) =3x270 – 3x90 =810 – 270 =540
4. a + b + c = 1090
   a = b : 4 rezultă că b = 4a
   c = (a + b) : 2 + 40
   Înlocuim pe b cu 4a:
   a + 4a + (a +4a) : 2 + 40 = 1090
   5a + 5a : 2 + 40 = 1090 | x2
   10a + 5a + 80 = 2180
   15a = 2100
   a = 140
   b = 4 x 140
   b = 560
   c = 1090 – (560 +140)
   c = 390
   Răspuns: a=140; b=560; c=390
5. i) Câți lei costă cele 5 kg de cafea la 260lei/kg?
   260 x 5 = 1300 (lei)
   ii) Câți lei costă cele 3 kg de cafea la 320 lei/kg?
   300 x 3 = 900 (lei)
   iii) Câți lei costă în total cafeaua?
   1300 + 900 = 2200 (lei)
   iv) Câte kg de cafea sunt în total?
   5 + 3 = 8 (kg)
   v) Câți lei costă un kg de cafea amestec?
   2200 : 8 = 275 (lei)
   Răspuns : 275 lei/kg cafea amestec
6. La fel ca la problema nr.1. *Răspuns*: 72 grade
7. 5, 7 mere

8. Dănuț este în clasa a II-a – lucuieşte în Iaşi; Anghel este în clasa I si locuieşte în Vaslui; Petru este în clasa a III-a şi locuieşte în Bacău

9. 2 caise = 1 piersică

10. i) Cât înseamnă 3 sferturi din viața omului? 10 + 8 + 3 = 21 (ani)
ii) Cât înseamnă un sfert din viața omului? 21 : 3 = 7 (ani)
iii) Câți ani a trăit ? 21 + 7 = 28 (ani)
iv) În ce an s-a născut? 1907 + 8 = 1915
v) În ce an a murit? 1914 + 28 = 1943
Răspuns: în anul 1943.

11. Notăm cu x vârsta fetei: 101 – 5 = 96; deci vârsta ei este 96:8 = 12
Dacă x = 12 atunci: Dan are 12+2 = 15 ani; mama: 12x3 = 36 ani; tata: 36 + 3 = 39 ani.
Răspuns:12; 14; 36; 39 ani

12. a) 5 + 8 + 4 x 9 + 1 = 50
b) 5 + 8 +11 + 20 + 20 + 15 = 79

13. 7 probleme/zi …………18 probleme
10 probleme/zi ………. 3 zile libere
3 x 7 = 21 probleme
21 + 18 = 39 probleme
39 : 3 = 13 zile
Numărul de probleme: 13 x 10 = 130 sau: 16 x 7 = 130
Răspuns: 130 probleme; 13 zile.

15. 17 + 14 + 13 = 44 bomboane; 44:4 = 11 bomboane pentru fiecare
I copil a primit: 17–11=6; al II-lea: 14–11=3; al III-lea: 13–11=2;
6 x 2 = 12; 3 x 2 = 6; 2 x 2 = 4
Răspuns: 12; 6; 4 (nuci).

16. Suma unei foi rupte este un număr impar. Dacă au fost rupe 13 foi, şi acest număr este tot impar – atunci suma tuturor filelor va fi obligatoriu tot un număr impar; Deci Marian a greşit.

17. 12; 13; 8; 12 (bomboane)

T______.__.______.________.________.______.
.________.__.________.__________. R1
.____._.___.____.____. R2
.____.___.____. R3

R3 = 4 x 3 = 12	I. 9 + 3 = 12
R2 = 12 + 3 = 15	II . 11 + 2 = 13
15 : 3 x 4 = 20	III. 5 + 3 = 8
R3 = 20 + 2 = 22	IV. 8 + 4 = 12
22: 2 x 3 = 33	

T = 33 + 3 = 36

36 : 3 x 5 = 45

Total: 45 (bomboane)

18. 228 : 12 x 13 = 247

19. 44 lei; 88 lei; 22 lei

Rezolvare:

3 ursuleți ….3 păpuși costă 440 lei

2 păpuși = 4 ursuleți 1 păpușă= 2 ursuleți

1 ursuleț = 2 mașinuțe

Înlocuim: 3 ursuleți…… 3 păpuși = 6 ursuleți....2 mașinuțe

9 ursuleți x 2 = 18 + 2 = 440 lei

20 mașinuțe = 440

o mașinuță = 22 lei

un ursuleț = 22 x 2 = 44 lei

o păpușă = 44 + 44 = 88 lei

20. 4 buchete de câte 17 garoafe și 7 de câte 13 garoafe.

Rezolvare: Dacă ar face perechi de 17 + 13 = 30, s-ar obține 5 buchete de fiecare fel, dar rămân 9 garoafe. Atunci vom renunța la un buchet de 17 garoafe și obținem: 17 + 9 = 26 flori. Din acestea putem forma alte 2 buchete câte 13 garoafe.

5 - 1 = 4 (buchete de câte 17 garoafe)

5 + 2 = 7 (buchete de câte 13 garoafe)

21. 100

22. 0

23. 10

24. a) x = 10

b) 110

25. a) 2010

b) x = 56

26. a) x = 5

b) A=20, C=10

27. x=1, y=2, z=1

28. (2,9); (3,6); (1,18)

29. 10

30. 100

31. x=5

32. x=8

33. 10100; 1688

34. 5000

35. 9

36. 10 min.
37. 32
38. 18
39. 130
40. 626
41. 1+2+3+...+10 = 54 $\Rightarrow$ cel puțin două numere trebuie să fie egale
42. r = 12
43. $b+c+2\cdot a+d = 23$; $8\cdot a+3\cdot c+4\cdot b+3\cdot d = 79$
44. 0 sau 4
45. î=19, c=2
46. 119, 133
47. (559 şi 562), (604 şi 607), (1054 şi 1057)
48. 35
49. 635, 211
50. 18, 13
51. 48, 16
52. 13, 3
53. 6 soluții; 8; 16; 24; 32; 40; 48
54. 128; 137; 146; 236; 245
55. (2 şi 15); (13 şi 4)
56. 692
57. x=1, z=9, y={2,3,4,5,6,7,8}
58. 11; 12; 13
59. *S = a+b.*

D= a – b, a ≥ b

S = (D:2)· 4+r, r < (D:2).

Cum (D:2)· 4≤ S ⇒ (D:2)≤ S:4 ⇒ D:2≤ 16

$$\left.\begin{array}{l}\text{Deci } r < 16, \text{ adica } r \in \{0,1,2,...,15\} \\ \text{Cum } S = (D:2)\cdot 4 + r \Rightarrow 64 = (D:2)\cdot 4 + r\end{array}\right\} \Rightarrow r \in \{0,4,8,12\}$$

a) Dacă r=0 ⇒ 64=(D:2)· 4 ⇒ D:2 = 16 ⇒ D = 32.

$$\left.\begin{array}{l} S = 64 \\ D = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 48 \\ b = 16 \end{cases}.$$

b) Dacă r=4 ⇒ 64=(D:2)· 4 +4⇒ D:2 = (64-4):4 ⇒ D:2 =15

$$\left.\begin{array}{l} S = 64 \\ D = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 47 \\ b = 17 \end{cases}$$

c) Dacă r=8 ⇒ 64=(D:2)· 4 +8⇒ D:2 = (64-8):4 ⇒ D:2 =14

$$\left.\begin{array}{l} S = 64 \\ D = 28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 46 \\ b = 18 \end{cases}$$

d) *Dacă r=12* $\Rightarrow 64=(D:2)\cdot 4 + 12 \Rightarrow D:2 = (64-12):4 \Rightarrow D:2 = 13$

$$\left.\begin{array}{l} S = 64 \\ D = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 45 \\ b = 19 \end{cases}$$

R: (48,16); (47,17); (46,18); (45,19)

60. (î=18, c=2); (î=12, c=3); (î=9, c=4)
61. (20; 22; 24)
62. 1073; 1370; 3071; 3170
63. $\overline{a5b}$ ÷ 158, 950, 752, 554, 356
64. 12; 24; 36; 48
65. *a* = 2; *b* = 3; *c* = 4; *d* = 1
66. deîmpărțit = 260; împărțitor = 32; cât = 8; rest = 4
67. I = 30; II = 10
68. 34; 25 (mere)
69. 21; 24; 16 (fundițe)
70. 9; 36; 18
71. a=30, b=5, c=10
72. 35 zidari, 24 dulgheri
73. 1 kg mere=5000 lei, 1 kg caise=10000 lei
74. a=4020, b=2000, c=20
75. 25 căpşune
76. a=160, b=44, c=15
77. 10, 12, 14, 16
78. 125, 375, 400
79. S=143
80. a=542, b=258
81. 28 ani, 32 ani
82. 60, 40, 50, 60
83. 122 < 199
84. 55, 27, 13
85. 120, 30
86. 480; 300
87. 347; 103
88. Victor – 17 ani, gemenii – 11 ani
89. 6; 9
90. bunicul – 60 de ani; tatăl – 35 de ani
91. 35 piese

92. 6 bile albe, 24 bile roşii
93. 25140 kg
94. 122 kg, 244 kg, 246 kg
95. 75g, 150g, 225g
96. 25 ani
97. 25 ani
98. 40 ani
99. 43680 lei
100. 42 lei, 210 lei
101. o carte + un joc = 8 lei+16 lei = 24 lei; 5 cărţi şi 8 jocuri = 168 lei
102. 23 ani
103. 28 elevi
104. 6 corecte şi 2 greşite
105. Anca – 10 creioane, Ioana – 8 creioane
106. Maria = 12 ani; mama = 40 ani
107. I = 26 nuci, II = 65 nuci şi III = 169 nuci sau I = 28 nuci, II = 70 nuci şi III = 182 nuci
108. *$S = a+b$.*
$D= a - b,\ a \geq b$
$S\cdot 5 = (D\cdot 4)\cdot 2+r,\ r < (D\cdot 4) \Rightarrow r\in\{0,1,2,...,39\}$
$S\cdot 5 =40\cdot 2+r,\ r < 40 \Rightarrow r\in\{0,5,10,15,20,25,30,35\}$
a) Dacă $r=0 \Rightarrow S\cdot 5 = 80 \Rightarrow S = 16 \Rightarrow a = 13;\ b = 3$
b) Dacă $r=5 \Rightarrow S\cdot 5 = 85 \Rightarrow S = 17 \Rightarrow$ nu există numere naturale a căror sumă să fie 17, iar diferenţa 10.
c) Dacă $r=10 \Rightarrow S\cdot 5 = 90 \Rightarrow S = 18 \Rightarrow a = 14;\ b = 4$
d) Dacă $r=15 \Rightarrow S\cdot 5 = 95 \Rightarrow S = 19 \Rightarrow$ nu există soluţie
e) Dacă $r=20 \Rightarrow S\cdot 5 = 100 \Rightarrow S = 20 \Rightarrow a = 15;\ b = 5$
f) Dacă $r=25 \Rightarrow S\cdot 5 = 105 \Rightarrow S = 21 \Rightarrow$ nu există soluţie
g) Dacă $r=30 \Rightarrow S\cdot 5 = 110 \Rightarrow S = 22 \Rightarrow a = 16;\ b = 6$
h) Dacă $r=35 \Rightarrow S\cdot 5 = 115 \Rightarrow S = 23 \Rightarrow$ nu există soluţie
Răspuns: (13,3); (14,4); (15,5); (16,6)
109. *Fie x, y şi z numărul nucilor din fiecare ladă.*
În final în fiecare ladă vor fi 72:3 = 24 nuci.
24 nuci din prima ladă reprezintă două treimi din numărul iniţial de nuci. Deci în prima ladă erau iniţial 24+12= <u>36 nuci = x</u>
24 nuci din lada a doua reprezintă trei pătrimi din (y+12); deci y+12 = 24+8, adică y = 32-12 = 20 nuci
În concluzie, în prima ladă erau iniţial 36 nuci, în a doua 20 nuci, iar în a treia 72-(36+20) = 16 nuci = z

110. *După un an cei trei frați aveau la bancă suma* S_1 *=*
750·3+dobândă.
Dobânda=(7·20+10)·3=150(lei)·3=450 lei.
S_1*=2250+450=2700.*
După încă un an cei trei frați aveau la bancă suma
S_2*=2700+dobânda.*
Dobânda=27·20=540(lei).
S_2*=2700+540 = 3240.*
Răspuns: Nu. Mai trebuie 3610 – 3240=370(lei).
111. *Suma numerelor primelor două bile extrase este 7·2=14.*
O pătrime din numărul bilei a treia este 14-10=4=numarul bilei a doua.
Numărul bilei a treia este 4.4=16.
Suma =10+4+16+7 = 37
112. 375 km
113. fete – 12; băieți – 20
114. I = 32; II = 16
115. (76; 16; 28)
116. 62
117. 5, 6, 7, 8, 9, 10
118. 624 pagini
119. 11 ani
120. numărul este 9
121. Ana – 192; Maria – 144
122. Bogdan, Codrin, Andrei
123. Irina – 145 timbre; Mihai – 110 timbre; Andrei – 105 timbre
124. 2632000 lei
125. O minge costă 25 lei şi sunt 85 lei
126. L = 244 m
127. 54 bomboane şi 57 bomboane
128. 8 ani şi 10 ani
129. 2 ani; 2 ani; 3 ani; 3 ani;
130. Alina 8 ani, mama 24 ani, tata 32 ani, peste 16 ani
131. galbene – 74, roşii - 44
132. 6 nepoți
133. 550 găini, 195 oi
134. 31 trandafiri
135. 15 fete, 7 băieți
136. 16 cutii; 99 creioane
137. 26 bomboane

138. a) 3 şosete; b) 9 şosete
139. a) 4 mere; b) 7 mere
140. mere – 10; pere – 16
141. 2500 patrupede; 100 păsări; 50 şerpi
142. 301 sportivi
143. 18 bănci
144. a) 188; b) 316, 317, ... , 330
145. Sunt 225 bile albastre, 65 bile roşii şi 10 bile galbene: a) 65+10+3= 78 bile; b) 7 bile; c) 225+65+1=291
146. 21 încercări
147. 4 drumuri dus-întors
148. 02 iulie
149. 124496
150. 12 lei, 8 lei, 3 lei

Clasa a V-a

1. Obținem $12(a+b)$ pătrat perfect, de unde deducem că $a+b\in\{3,12\}$; $a\neq b \Rightarrow \overline{ab}\in\{12,21,39,48,57,75,84,93\}$.
2. $2009=41\cdot 49$, restul împărțirii va fi restul împărțirii numărului 2012 la 2009, adică 3.
3. Ultima cifră este 9.
4. $1\in\mathbf{N}$
5. $\overline{abc}$=987 şi $\overline{xy}$=10.
6. Ținând cont de paritatea numerelor a, b, c, deducem că fiecare termen al sumei din membrul stâng este par, de unde rezultă că suma este număr par, dar cum suma este 2003, număr impar, rezultă că nu există numere a,b,c care să verifice relația dată.
7. $\overline{xxy6}=\overline{ab}\cdot c+98,\ \overline{ab}>98\Rightarrow \overline{ab}=99$;
   $\overline{xxy6}=99\cdot c+98\Rightarrow U(c)=2.$ Pentru c=22, rezultă că $\overline{xxy6}$=2276.
8. A={4,16} ; B={2,4} ; C={3,15}.
9. a) $122=4\cdot 30+2\notin A$; $621=4\cdot 155+1\in A$; $1290=4\cdot 322+2\notin A$.
   b) $C-(A\cup B)=\{0,1,2,3,4,......,20\}-(\{4n+1/n\in\mathbf{N}\}\cup\{3m/m\in\mathbf{N})$
   $\Rightarrow C-(A\cup B)=\{2,4,7,8,10,11,14,16,19\}$
   c) $t\in A\cap B\Rightarrow t=4n+1$ şi $t=3m\Rightarrow t=3(4q-1)=12q-3$; $q\in\mathbf{N}$.
10. Emilia are 2 ani, tatăl are 30 de ani iar bunica 58 ani.
11. a) x = 7y+13; $y\geq 14$ atunci 3x-21y-23 = 21y+39-21y-23 = 16 = 4^2
    b) $3x-2y\leq 305 \Rightarrow 21y+39-2y\leq 305 \Rightarrow 19y\leq 266,\ y\leq 14$. Dar $y\geq 14$, rezultă y=14 şi x=111.
12. Scăzând prima relație din cea de-a doua, obținem $b+2c=25$. A doua relație devine $(a+b+c)+3(b+2c)=225 \Rightarrow a+b+c=225-3\cdot 25=150$.
13. Pentru n=1 avem $19=3^2+3^2+1^2$. Pentru n=2 avem
    $19^2=18^2+6^2+1^2$. Dacă $n=2\cdot k,\ k\geq 1\Rightarrow$
    $19^{2k}=19^2\cdot 19^{2k-2}=(18^2+6^2+1)\cdot 19^{2k-2}=(18\cdot 19^{k-1})^2+(6\cdot 19^{k-1})^2+(19^{k-1})^2$. Dacă $n=2\cdot k+1,\ k\geq 1\Rightarrow 19^{2k+1}=19\cdot 19^{2k}=$
    $=(3^2+3^2+1^2)\cdot 19^{2k}=(3\cdot 19^k)^2+(3\cdot 19^k)^2+(19^k)^2$.
14. N=11…..113 (unde cifra 1 apare de 2011 ori) $\Rightarrow$N=11…100+13 (unde cifra 1 apare de 2010 ori) $\Rightarrow$N=$11\ldots 11\cdot 100+13$ (unde cifra 1 apare de 2010 ori)

$\Rightarrow$ N=111111($10^{2004}+10^{1998}+10^{1992}+\ldots+10^{6}+1$)+13 =
=13(8547A+1) unde A=$10^{2004}+10^{1998}+10^{1992}+\ldots+10^{6}+1$, deci N este divizibil cu 13.

15. a) (a, b, c)$\in$\{(0,1,143), (0,11,13), (0,13,11), (0,143,1), (1,70,2), (1,0,142), (2,109,1), (0,1,13), (0,13,1), (1,5,2), (1,2,4), (1,0,12), (0,1,11), (0,11,1), (1,4,2), (1,0,10), (1,y,0)\}, y$\in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

b) $x^3+y^2+z\in\{1,2,7,14\}$. Se obține $\overline{xyz}\in\{100, 101, 110, 106, 115, 122, 129, 134, 206, 215, 222\}$.

16. Cele şase numere în ordine sunt: 48, 12, 6, 30, 60, 24.

17. $\dfrac{\overline{xyzt}}{\overline{xy}+\overline{zt}}=\dfrac{100\overline{xy}+\overline{zt}}{\overline{xy}+\overline{zt}}=\dfrac{99\cdot\overline{xy}}{\overline{xy}+\overline{zt}}+1$. Numărul căutat este 1099.

18. Dacă x=1 $\Rightarrow 11^1=11$ – nu convine. Dacă x=2 $\Rightarrow 22^2=484$ – nu convine. Dacă x=3 $\Rightarrow 33^3=35937$. Dacă $x\geq 4 \Rightarrow \overline{xx}^{\overline{x1}}>10^5$ nu convine.

19. $2\in A\overset{3)}{\Rightarrow}1\in A\overset{2)}{\Rightarrow}5\in A\overset{2)}{\Rightarrow}17\in A\overset{3)}{\Rightarrow}4\in A.$ $2\in A\overset{2)}{\Rightarrow}8\in A\overset{2)}{\Rightarrow}26\in A.$

20. $x\in A\Rightarrow U(x)\in\{2,7\}. y\in B\Rightarrow U(y)\in\{3,8\}$.
Deci $A\cap B=\Phi\Rightarrow \text{card}(A\cap B)=0$.

21. 270 elevi.

22. $x=1$.

23. Notăm $\overline{abcd}=x$ şi obținem $x^{1+3+5+\ldots+4009}=x^{x^2}$ de unde $x^2=2005^2$ iar $\overline{abcd}=2005$.

24. a) Pentru n=63 se observă că numărul termenilor din şir este dat de suma 1+2+3+….+63=$(63\cdot 64):2=2016$.

b) Numărul 62 se află în şir pe locul $(62\cdot 63):2=1953$. Atunci pe locul 2007 se află numărul 2007-1953=54.

25. $x^3+y^3=3x+5y+1999 \Leftrightarrow (x^3-3x)+(y^3-5y)=1999 \Leftrightarrow$
$x(x^2-3)+y(y^2-5)=1999$. Se arată că $x(x^2-3)$ şi $y(y^2-5)$ sunt numere pare, deci nu există numere naturale x,y care să verifice egalitatea.

26. Notăm cu x numărul elevilor clasei. Fiecare din cele două ipoteze implică mărirea efectivului clasei cu un elev, deci noul efectiv al clasei ar fi egal cu $x+1$. Exprimăm numărul băieților în fiecare caz

în funcție de $(x+1)$. În prima situație numărul băieților este $\frac{2}{5}$ din $(x+1)$ iar în a doua situație numărul băieților este $\frac{1}{2}$ din $(x+1)$. Cum în a doua situație numărul băieților este mai mare cu 3 decât în prima, se deduce că 3 reprezintă $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ din $(x+1)$ de unde rezultă $x+1=30$, deci $x=29$.

27. Presupunem că există un astfel de număr n astfel încât $n=3q+1$ şi $n=6p+3, p,q\in \mathbf{N}$. Cum $n=3q+1$ şi $n=3(2p+1)$, observăm că n dă două resturi diferite: 0 şi 1 prin împărțirea la 3 ceea ce este imposibil. Rezultă că presupunerea făcută este absurdă.

28. $\overline{abc}=\overline{cba}\cdot 2+100,\ 100<\overline{cba}$ şi $a-c=4 \Rightarrow \overline{abc}=692$.

29. 2002=$a\cdot c+4-a,\ 0\le 4-a<a \Leftrightarrow 2<a\le 4 \Leftrightarrow a\in\{3,4\}$. Dacă $a=3\Rightarrow c=667$, iar dacă $a=4\Rightarrow c=\frac{1001}{2}\notin \mathbf{N}$.

30. $a=30^n\cdot 1999$.

31. $y^2+y=y(y+1)$ este număr par $\Rightarrow 2^x$ este număr impar $\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0$. Avem $y(y+1)=5112=2^3\cdot 9\cdot 71=71\cdot 72$, de unde $y=71$.

32. $\overline{abcd}=8\overline{aad}+\overline{abd}$. Se obține $\overline{abcd}\in\{1025, 2005\}$.

33. $\overline{xyzt}\in\{1997,2998\}$.

34. 1995 este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9 şi prin urmare, nu poate fi pătrat perfect.

35. $\overline{bc}=\overline{ac}$ şi $\overline{ab}=\overline{bc}+1\Rightarrow a=b$ şi $a=c+1$. A$=\{110,\ 221,\ 332,\ 443,\ 554,\ 665,\ 776,\ 887,\ 998\}$.

36. Se obține ecuația $\overline{ab}+a+b=49$ de unde se obține soluția $a=3$ şi $b=8$.

37. S=$2^0+2^1+2^2+...+2^{2001}=$

$=(2^0+2^1)+(2^2+2^3)+(2^4+2^5)+...+(2^{2000}+2^{2001})=$

$=(2^0+2^1)+2^2(2^0+2^1)+2^4(2^0+2^1)+$

$...+2^{2000}(2^0+2^1)=3(1+2^2+2^4+...+2^{2000})$. Rezultă: $x=3$.

38. $\overline{abc}=5\cdot\overline{bc}+a,\ 0\le a<5\Rightarrow 99a=4\cdot\overline{bc},$ a<5 $\Rightarrow\overline{abc}=499.$

39. $\overline{abc}=\overline{bc}\cdot 7+20,\ 20<\overline{bc}\Rightarrow 100\cdot a=6\cdot\overline{bc}+20\Rightarrow c\in\{0;5\}.$

I. c= $0\Rightarrow 100a=6\cdot\overline{bc}+20\Rightarrow 10a=6b+2\Rightarrow b\in\{3;8\}.$

I.1. $c=0$ şi $b=3\Rightarrow a=2;$

I.2. $c=0$ şi $b=8\Rightarrow a=5.$ Aşadar, $\overline{abc}\in\{230;580\}.$

40. $ab=72,\ bc=48,\ ca=54.$ Înmulțind cele trei egalități membru cu membru obținem: $(abc)^2=(6\cdot 8\cdot 9)^2\Rightarrow abc=2^4\cdot 3^3.$ Rezultă că $c=(abc):(ab)=(2^4\cdot 3^3):(2^3\cdot 2^3)=2\cdot 3$; Deci $c=6;\ b=8;\ a=9.$

41. $n^2+n^3=n^2(n+1)\Rightarrow n^2(n+1)=p^2,$ p număr natural, deci $n+1$ este pătrat perfect (n este cel mai mic număr natural de două cifre), prin urmare $n=15.$

42. În prima etapă se dau 3 telefoane, în etapa a doua se dau $3\cdot 3=3^2$ telefoane, în etapa a treia se dau $3\cdot 3^2=3^3$ telefoane;…; în etapa n se dau $3\cdot 3^{n-1}=3^n$ telefoane. Avem ecuația

$3+3^2+3^3+...+3^{n-1}=363$ etc. Se obține $n=6.$ Conchidem că elevii sunt informați în 6 etape.

43. 970.

44. Suma numerelor este 1001.

45. $a=46, b=21, c=5.$

Clasa a VI-a

1. $p = \frac{3}{36} \Rightarrow p = \frac{1}{6}$.
2. $p = \frac{5}{30} \Rightarrow p = \frac{1}{6}$.
3. $\frac{5\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} = \frac{12}{\boldsymbol{b}} \Rightarrow \frac{5\boldsymbol{b}}{240} = \frac{12}{\boldsymbol{b}} \Rightarrow$

   $\Rightarrow 5\boldsymbol{b}^2 = 240\cdot 12 \Rightarrow \boldsymbol{b}^2 = 576 \Rightarrow \boldsymbol{b} = 24 \Rightarrow \boldsymbol{a} = 10.$
4. $\frac{10\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{10\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}} = \frac{4}{7} \Rightarrow 66\cdot\boldsymbol{a} = 33\cdot\boldsymbol{b} \Rightarrow 2\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{ab}} \in \{12,24,36,48\}$.
5. $\frac{3}{\boldsymbol{a}} = \frac{4}{\boldsymbol{b}} = \frac{5}{\boldsymbol{c}} = \frac{12}{4\cdot\boldsymbol{a}} \Rightarrow \frac{12}{3\cdot\boldsymbol{b}} = \frac{10}{2\cdot\boldsymbol{c}} = \frac{10+12-12}{2\cdot\boldsymbol{c}+3\cdot\boldsymbol{b}-4\cdot\boldsymbol{a}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ a = 12; b = 16; c = 20.
6. $\frac{2}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 1\cdot2\cdot3 = 1\cdot3\cdot2 = 3\cdot1\cdot2 = 3\cdot2\cdot1 = 2\cdot3\cdot1 = 2\cdot1\cdot3 =$

   $= 1\cdot1\cdot6 = 1\cdot6\cdot1 = 6\cdot1\cdot1.$
7. $\boldsymbol{b} = \frac{5}{4}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} = \frac{5}{2}\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}^3\cdot\frac{25}{8} = 1600 \Rightarrow \boldsymbol{a} = 8, \boldsymbol{b} = 10, \boldsymbol{c} = 20.$
8. a) ***x*** = 20% din ***z*** şi ***x*** = 25% din ***y***.

   b) ***x*** = 30, ***y*** = 120, ***z*** = 150.
9. $3^{\boldsymbol{n}}\cdot15\cdot4^{\boldsymbol{n}} + 15\cdot4^{\boldsymbol{n}} = 3^{\boldsymbol{n}}\cdot15\cdot4^{\boldsymbol{n}} + 3^{\boldsymbol{n}}\cdot4\cdot5^{\boldsymbol{n}} \Rightarrow 15\cdot4^{\boldsymbol{n}} = 3^{\boldsymbol{n}}\cdot4\cdot5^{\boldsymbol{n}} \Rightarrow \Rightarrow$

   $\left(\frac{4}{15}\right)^{\boldsymbol{n}} = \frac{4}{15} \Rightarrow \boldsymbol{n} = 1.$
10. ***x*** = 2, ***y*** = 8, ***z*** = 16, ***t*** = 4.
11. $\frac{3}{11}$.
12. 1728.
13. 2005.
14. 158°8′
15. 500 km
16. 7 cm
17. a) L.U.L. (ΔABE ≡ ΔACD)

    b) ΔBPD ≡ ΔCPE (L.U.U.) ⇒ [BP] ≡ [CP]

    ΔABP ≡ ΔACP (L.L.L.) ⇒ ∠ BAP ≡ ∠ CAP

    c) ΔADP ≡ ΔAEP (L.U.L.) ⇒ ∠APD ≡ ∠APE

$A \in$ bisectoarei $\angle DPE \Rightarrow d(A,PD) = d(A,PE) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d(A,CD) = d(A,BE) = 3$ cm.

18. $x + \frac{16}{100}x = \frac{116}{100}x$; $\frac{116}{100}x - \frac{16}{100} \cdot \frac{116}{100}x = \frac{84}{100} \cdot x \cdot \frac{116}{100}$;
$\frac{84}{100} \cdot \frac{116}{100} \cdot x = x - 16 \Rightarrow x = 625$.
19. $\frac{2130}{9012}$; $\frac{9138}{2016}$.
20. $n = 0$
21. $x = 1$
22. $p = \frac{1}{5}$
23. 2000 lei
24. 360 kg
25. 25 zile
26. $a = 4$, $b = 6$, $c = 10$.
27. 2 zile
28. 10 zile
29. 57^0
30. 34^0
31. $\Delta ABC \equiv \Delta BAD \Rightarrow [BC] \equiv [AD]$ şi $A\hat{B}C \equiv B\hat{A}D$. Avem şi $B\hat{O}C \equiv A\hat{O}D$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \Delta BOC \equiv \Delta AOD$ (L.U.U.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow [OA] \equiv [OB]$ şi $[OC] \equiv [OD]$.
32. Din congruenţa ΔOAB şi ΔOCD.

<u>Clasa a VII-a - algebră</u>

1. 66,(6)
2. 7657
3. a) termenul de pe poziția 2008 este $\frac{2008+5}{2008\cdot 5}$

   b) media geometrică a numerelor este $\frac{\sqrt{101}}{50}$
4. k = $\frac{1}{7}$
5. a=b; a=3c; A=$\sqrt{\frac{5}{6}}$; numărul este 1
6. $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$
7. 100 lei şi 80 lei
8. brigada 1 are nevoie de 180 de zile iar brigada 2 de 60 de zile.
9. se ridică relația la pătrat şi se foloseşte inegalitatea mediilor
10. se foloseşte relația $1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{1003} = 2^{1004}-1$
11. a) suma este 4510·1117

    b) elementele din primul şir sunt de forma 4k+3; 3526 nu este termen al şirului

    c) 2234 numere

    d) al 21-lea
12. $\frac{1}{3}$
13. $\frac{p}{q}=\frac{3}{5}$
14. a) $n\in\{1,2,3,4,5\}$

    b) $\left(6\cdot\overline{ab}+5\right)^2$
15. x=0
17. 0

18. b) $\frac{1-a+a}{a-1}+\frac{2-a+a}{a-2}+...+\frac{2006+a-a}{a-2006}=1$, de unde

$\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a-2}+...+\frac{a}{a-2006}+(-2006)=1$ şi se foloseşte faptul că numărul a este soluție a ecuației.

19. Se scriu rapoartele $\frac{3n+4}{2n+3}=\frac{2n+3}{2n+3}+\frac{n+1}{2n+3}$ şi

$\frac{5m+8}{2m+3}=\frac{4m+6}{2m+3}+\frac{m+2}{2m+3}$.

Adică $a=1+\frac{n+1}{2n+3}+2+\frac{m+2}{2m+3}=4$ deoarece $0<\frac{n+1}{2n+3}<\frac{1}{2}$ şi

$1>\frac{m+2}{2m+3}>\frac{1}{2}$

21. a) $\frac{9}{5}$

b) 25%

22. Se înmulțesc parantezele apoi se aduce expresia la forma:

$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{c}}-\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^2+...+\left(\frac{d}{\sqrt{c}}-\frac{c}{\sqrt{d}}\right)^2=0$, de unde $a = =$

$b = c = d$.

23. Se găseşte că $a \cdot b \cdot c = 1$ şi $a=b=c=1$.

24. 2012.

25. $\frac{n+2008}{n+5}=\frac{n+5+2003}{n+5}=1+\frac{2003}{n+5}\in N \Rightarrow A=\{2\}$

26. $\frac{1+2}{1\cdot 2}+\frac{1+3}{2\cdot 3}+\frac{1+4}{3\cdot 4}+...+\frac{1+n+1}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=$

$=2-\frac{1}{n+1}<2$

27. 0

28. 3

29. $(a,b,c)\in\{(5,-5,5),(-5,5,-5)\}$

30. $\frac{3}{1009}$

31. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

32. $x\in\{3,-9\}$

33. $x \in \{4,6,8,10\}$

34. a) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 (A)$

b) $\frac{4+5}{2} \geq \sqrt{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{4+5}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{2}$

Analog, fiecare fracție este mai mică decât $\frac{1}{2} \Rightarrow S < 4$

35. x = 6, y = 3, z = 9

36. a = 2, b = 1

37. a) $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

b) 225%

c) de 4 ori

38. $\sqrt{6^{2n} \cdot 9 + 6^{2n} \cdot 4^2} = \sqrt{6^{2n}(9+16)} = \sqrt{6^{2n} \cdot 25} = 6^n \cdot 5 \in N$

39. u.c.(5n)={0,5} $\Rightarrow$ u.c.(5n+2)={7,2} $\Rightarrow$ 5n+2 $\neq$ pp $\Rightarrow$ $\sqrt{5n+2} \notin Q$ oricare ar fi $n \in N$.

40. folosim inegalitatea mediilor: $m_a \geq m_g$

41. $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} = 1-\frac{1}{x+1} = \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{99}{100} \Rightarrow$ x = $99 \in N$.

42.

$$\left.\begin{aligned} 2a-b=kc \\ 2b-c=ka \\ 2c-a=kb \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+b+c = k(a+b+c)$$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = \frac{b+c}{2}, b = \frac{a+c}{2}$

43. Se aplică media aritmetică.

44. $x = 2011$

45. $\overline{xy} = 81$

46. 1(10-7)+2(11-8)+…+32(41-38) = 3(1+2+…+32) = 1584

47. a) $a = \frac{23}{31}$, $b = \frac{7}{31}$, $c = \frac{2}{31}$

b) a = 23, b = 7, c = 2

Clasa a VII-a - geometrie

1. Fie AM$\cap$EC={T}. Se aplică Teorema lui Menelaus în triunghiul CBE cu transversala MA. Se arată că T este mijlocul segmentului EC, deci coincide cu F.
2. a) TN=3, NC=$3\sqrt{2}$, TNC este triunghi obtuzunghic şi TN$\neq$NC.
   b) aria ΔTMP este jumătate din aria ΔBTC care este egală cu 9
   c) deoarece TM=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$, MP=$3\sqrt{2}$, TP=$\frac{3\sqrt{10}}{2}$.
3. Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$. Dar $\frac{BD}{DC}=\frac{AF}{AE} \Rightarrow$ triunghiuri asemenea $\Rightarrow$ $\angle$F≡$\angle$B şi $\angle$E≡$\angle$C. Se arată uşor că $\angle$RMD≡$\angle$MDR.
4. a) D este ortocentrul triunghiului EBF. Deci DB⊥EF şi cum DB⊥AC $\Rightarrow$ EF||AC.
   b) ΔBEF este isoscel deoarece BD este şi înălţime şi bisectoare.
   c) ΔBEF este echilateral
5. Fie MB=2x, MP=x atunci BP=$x\sqrt{3}$. Folosind reciproca T lui Pitagora, rezultă $\angle$MPB drept.
6. MNBP şi MNQA sunt paralelograme. AP=AQ-PQ si QB=PB-PQ.
7. Fie O punctul de intersecţie al dreptelor BN şi CM. Se arată uşor că O$\in$AD.
8. ABCD este trapez dreptunghic cu B şi C unghiuri drepte. Aria este $13{,}5\sqrt{3}$, perimetrul $15+3\sqrt{3}$. Aria ΔBOA este $1{,}5\sqrt{3}$, aria ΔDOC este $6\sqrt{3}$.
9. Distantele sunt 7 respectiv 17. Unghiul este de 45^0.
10. B=35 hm, b=20hm, lat. oblică=25 hm. Aria trapezului este 550 ha.
11. a) aria creşte cu $10\sqrt{2}$
    b) aria creşte cu $6\sqrt{2}$
    c) aria rombului este $2\sqrt{2}$.
12. DE este mediană în triunghiul dreptunghic ABD, FG este linie mijlocie în ΔABC.
13. 110^0
14. Se foloseşte faptul că suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este 180^0.
15. Se arată că d(D,AM) = d(B,AM) + d(C,AM).

16. 3cm

17. $\frac{1}{3}$

18. Se arată că AEMF este paralelogram. Este romb dacă şi numai dacă AM este bisectoare.

19. G_1G_2=8cm

20. ABC este triunghi isoscel

21. a) ΔAPB~ΔCPN şi din faptul că ABCD este paralelogram rezultă că CP=2OP. Din teorema bisectoarei în triunghiul ADC se vede că CM=2DM, deci din teorema reciprocă a lui Thales în ΔOCD ⇒ MP||DB.

    b) se aplică T. Menelaus în ΔCAD cu transversala PR. De aici AR=3RD, de unde AD=2RD. Iar AD=BC, de aici concluzia.

22. Fie R simetricul lui P față de B. DR∩AB = {Q}. AB=$\frac{2}{3}$a. Pentru ca PQ⊥QD atunci triunghiurile ADQ şi BQP trebuie să fie asemenea, de unde 2a=3b.

23. Se arata că EDFA este un dreptunghi. Deoarece triunghiurile MAD şi DAN sunt isoscele atunci MDN este unghi drept. Dacă MDNA este un patrulater inscriptibil atunci unghiurile cerute sunt congruente.

24. ΔMDC şi ΔMAB sunt isoscele şi dreptunghice. Se arată că MNBA şi DCNM sunt deltoizi. De unde rezultă că AN⊥MB, MC⊥DN.

25. Se aplică teorema fdt a asemănării.

26. G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci HB=$\frac{AB}{3}$, iar FH=$\frac{2}{3}$, BC =$\frac{AB}{3}$. Se arată că triunghiurile OGF şi DOB sunt asemenea, având raportul de asemănare egal cu $\frac{2}{3}$. Se găseşte că $\frac{OD}{OA}=\frac{3}{11}$.

27. Din congruența ΔCND ≡ ΔBMC ⇒ BM⊥CN.

28. Fie P mijlocul lui DC, MP linie mijlocie în ΔBDC, ND linie mijlocie în ΔAMP, deci ND=1cm.

29. a) DP||MT, DP⊥BM ⇒ MT⊥BM.

b) MT linie mijlocie în ΔAPC ⇒ T mijlocul lui PC, MP mediană în ΔMBT dreptunghic, MP=TC

30. Construim EF⊥AB, EG⊥BD şi aplicăm teorema catetei în ΔBEA şi ΔBED. Obținem BD = $4\sqrt{5}$ cm, AC= $8\sqrt{5}$ cm.

31. AF∩CE={G} centrul de greutate ⇒ GF $=\frac{1}{3}$ AF. Aplicăm teorema catetei în ΔAEF şi obținem BC= $4\sqrt{3}$ cm, AB = $4\sqrt{2}$ cm.

32. Se arată că m(ABF)=90^0.

33. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora triunghiul este dreptunghic.

34. A = $\frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{h_b \cdot b}{2} = \frac{h_c \cdot c}{2}$=k ⇒ $h_a = \frac{2k}{a}$, $h_b = \frac{2k}{b}$, $h_c = \frac{2k}{c}$. Înlocuim în relația dată şi obținem că $a^2 = b^2 + c^2$ ⇒ triunghiul este dreptunghic.

35. Folosim proprietățile liniei mijlocii dintr-un triunghi.

36. Cu teorema bisectoarei se arată că MC=2MA şi rezultă că M este centrul de greutate al triunghiului SBC.

37. Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în ΔABC, MP||AB şi obținem P_{MPCQ} = 54cm.

38. h = $3\sqrt{3}$ cm.

39. a)m(A) = 90^0;

b) EF = $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm, CE = $\frac{2\sqrt{22}}{3}$ cm, CO = $\sqrt{6}$ cm.

40. a) Se aplică teorema lui Thales în ΔABC şi ΔADB.

b) Fie PT||AD, (T∈DC) şi aplicăm teorema lui Thales.

41. Avem MN = $\frac{AB-DC}{2}$ şi BE = $\frac{AB-DC}{2}$, MN||BE ⇒ MNBE este paralelogram.

42. AN = 4 cm.

43. Avem ΔABE≈ΔFDA (U.U) ⇒ AB·AD= BE·DF (1). Dacă ABCD romb ⇒ AB^2 = BE·DF. Reciproc, dacă AB^2 = BE·DF atunci, din (1), obținem AB = AD ⇒ ABCD romb.

44. a) ΔCDM...ΔCAE ⇒ ∠CMD = ∠AEM = ∠AME ⇒ ΔAME isoscel cu ME baza;

b) ΔAEF isoscel şi EC bisectoare;

c) AEFM romb

45. a) Se consideră ΔABD echilateral, BE mediană, BE mediatoare, $BB' \perp AD$. Analog $D'D \perp BC$. Avem $AD \parallel BC \Rightarrow BB' \parallel DD'$ şi $BB' = DD' \Rightarrow BB'DD'$ paralelogram.
b) $m(\angle BB'D) = m(\angle EBA) = 30^0 = m(\angle BD'D)$
$m(\angle B'BD') = m(\angle B'DD') = 150^0$;
c) 25%.
46. Construim $R \in MS$ astfel încât ASBR paralelogram şi din asemănarea triunghiurilor ARM şi CSM obţinem $\frac{MA}{AC} = 2$ şi MC=30cm.
47. Se aplică asemănarea triunghiurilor.
48. BC=6cm; ΔBDC dreptunghic $\Rightarrow$ BD=2cm, BC=12cm, AD=9cm, $AC = \frac{DC}{2}$, $\Delta ACD \approx \Delta CBD \Rightarrow CD = 6\sqrt{3}$ cm, $A_{BCD} = 18\sqrt{3}$ cm^2, $A_{DAC} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2.
49. În ΔADC avem P centrul de greutate iar în ΔBCD, Q este centrul de greutate $\Rightarrow$ conform reciprocei teoremei lui Thales avem $PQ \parallel AB$.
50. a) MN = 12cm;
b) 120^0, 60^0;
c) $A_{MON} = 12\sqrt{3}$ cm^2.
51. a) $A_{ABCD} = 650$ cm^2;
b) $A_{BCD} = 250$ cm^2;
c) $A_{ABC} = 400$ cm^2.

Clasa a VIII-a - algebră

1. $\frac{1}{3} < \frac{41}{120} < S < \frac{41}{80} < \frac{2}{3}$
2. a) 4

   b) $(a-1)^2 \geq 0$

   c) $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}}^{\,x}$
3. x=2
4. $A = \{-7;-5;-4;-2;-1;1\}$
5. $x = \left(3\sqrt{5}-5\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)$
6. $A \cap B = \{-4,2\}; A - B = \{-8,-2\}; B - A = \varnothing$
7. $a \in \{-11,-10,...,-1,0,1\}$
8. x = 4,2
9. 1
10. $x \in \left[\frac{1}{2},1\right)$
11. $x \in \{17,4;16,9\}$
12. $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$
13. $x \in \left\{\frac{31}{5};\frac{88}{15}\right\}$
14. I_{-1}, I_0, I_2, I_3
15. $A \cup B = \left[-\frac{1}{3},\frac{5}{2}\right); A \cap B = \left(\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right]; A - B = \left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$
16. A = 25
17. $x \in (-\infty,-1)$
18. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

19. $x \in \{-10, 7\}$

21. b) $\frac{41000}{31209}$

22. b) $\frac{99}{100}$

23. folosim teorema împărțirii cu rest

24. A = {4,9,16,25}

25. $x \in \left\{-3, -1, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

26. $\left(k^2+1\right)^2 - 1$

27. 2011^2

28. $x \in [1,5]; y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]; z \in [0,4]$

30. a = 2

31. a) $R - \left\{-3, -2, -1, \frac{4}{5}, 3\right\}$

    b) x = 6

    d) $x \in \{-13, -8, -5, -4, 2, 7\}$

32. a) $R - \{-5, -4, -3, -2, 5\}$

    b) $x \in \{6, 0\}$

    c) $x \in \{-14, -8, -6, 4\}$

33. a = 2

34. f(x) = 3x + 4

35. f(x) = x + 1

36. f(x) = 3x + 2

    g(x) = -2x + 1

37. f(x) = 3x – 5

39. f(x) = 3x – 1; $A = \frac{1}{6} u.a.$

40. $A \cap B = \{-2, 4, 10\}$

Clasa a VIII-a – geometrie

2. $\frac{9}{10}$
5. 90^0
7. 45^0
10. b^2
14. $\sqrt{2}\cdot\frac{99}{24}$ cm
18. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ cm
22. b) $10\sqrt{13}$ cm
23. b) 5 cm
    c) 60^0
24. 4 cm
29. Cub cu $A = 2d^2$
30. 90^0
32. b) $\frac{1}{4}$
34. 60^0
37. $2a\sqrt{10}+a\sqrt{2}$, $\frac{7a^2\sqrt{11}}{6}$
42. 45^0, $\sqrt{2}$
43. $2a^2$
44. $48\sqrt{3}$ cm^3
45. 216 cm^2, 216 cm^3

Bibliografie

1. Alexandrescu Petruş ş. a., „*Matematică pentru testarea națională*”, Editura Paralela 45, Piteşti, 2006
2. Florica Banu ş.a., „*Matematică - testare națională*”, Editura GIL, 2006
3. Ovidiu Bădescu şi colectivul, „*Ghid de pregătire pentru TEZA CU SUBIECT UNIC*”, editura SIGMA, 2008
4. Artur Bălăucă, „*Olimpiade şi concursuri, clasa a V-a*”, Editura Taida, Iaşi, 2003
5. Artur Bălăucă, „*Aritmetică. 1300 de probleme semnificative. Olimpiade, concursuri şi centre de excelență*, *Clasa a V-a*”, ediția a V-a, Editura Taida, Iaşi, 2011
6. Artur Bălăucă ş.a., „*Matematică - Teme pentru activități opționale*”, Editura Taida, Iaşi, 2006
7. Dan Brânzei, Anița Sebastian, Anița Alice, „*Competență şi performanță în geometrie*”, Editura Paralela 45, Iaşi, 1998
8. Constantin Cocea, „*200 de probleme din geometria triunghiului echilateral*”, Editura Gh. Asachi, Iaşi, 1992
9. Traian Cohal, Eugenia Cohal, „*Geometria, o întreagă lume*”, Editura Dosoftei, Iaşi, 1995
10. Traian Cohal, Adrian Zanoschi, „*Probleme de matematică pentru clasa a VIII-a*”, Editura Moldova, Iaşi, 2004
11. Ioan Dăncilă, „*Divizibilitatea numerelor*”, Editura SIGMA, 2001
12. Gologan, Radu. „*Olimpiade şi concursuri şcolare: clasele IV-VI, 2010-2011*”, Paralela 45, Piteşti, 2011
13. Eugen Guran, „*Matematică recreativă*”, Editura Junimea, Iaşi, 1985
14. Nicu Miron ş. a., ”*100 de teste de matematică pentru pregătirea examenului de testare națională*”, Grup Editorial Art, 2007
15. Ioana Monalisa, Cristina Neagoe, „*Culegere de probleme de matematică pentru clasa a VII-a*”, editura Ed.AS.UNICUM, Bucureşti, 2009
16. Anton Negrilă, Măria Negrilă, „*Algebră, geometrie, clasa a VII-a*”, Editura Paralela 45, Piteşti, 2006
17. Anton Negrilă, Măria Negrilă, „*Algebră, geometrie, clasa a VIII-a*”, Editura Paralela 45, Piteşti, 2006

18. Veronica Păduraru, Floarea Aflori, *„Cui e frică de funcții?”,* Editura PANEUROPE, 2003
19. Sorin Peligrad ş.a., *„Algebră, geometrie, clasa a V-a”*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2004
20. Dumitru Săvulescu ş. a., „*Olimpiade județene, interjudețene şi naționale*”, Editura Scorpion 7, Bucureşti, 1994
21. Dumitru Săvulescu ş. a., „*Probleme de matematică*”, Editura Porto Franco. Galați, 1992
22. Mihaela Singer, „*Învățarea geometriei prin exerciții*”, Editura SIGMA, 1991
23. Ştefan Smarandache, „*Matematica pentru clasa a VII-a*”, editura SIGMA, 2008
24. Ştefan Smarandache, Camelia Diaconu, Liliana Deaconu, „*Matematică pentru clasa a VI-a*”, Editura Sigma, Bucureşti, 2007
25. Cătălin Stănică, Marius Perianu, Dumitru Săvulescu, „*Matematică pentru clasa a V-a*”, Editura Art, Bucureşti, 2011
26. Adina Stoica-Vasiliu, Angela Sava, „*Matematică – culegere de exerciții şi probleme pentru clasa a VI-a*”, Editura Taida, Iaşi, 2008
27. Petre Țelinoiu, „*Culegere de exerciții şi probleme de aritmetică*”, Editura Porto Franco, Galați, 1991
28. Liviu Țornghibel, „*Aritmetică, algebră şi geometrie clasa a VI-a*”, Editura Egal, Bacău, 2008
29. Dan Zaharia, Măria Zaharia, „*Algebră, geometrie, clasa a VI-a*”, Editura Paralela 45, Piteşti, 2005
30. Colecția Gazeta Matematică
31. Colecția Recreații Matematice
32. Colecția RMT
33. Colectivul de profesori de matematică, Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri” Iaşi – *Probleme de matematică pentru Concursul „Euclid”*, Editura Spiru Haret, Iaşi, 2004, 2005; Editura Taida, Iaşi, 2007-2009
34. „*Aritmetică, Algebră, Geometrie*”, clasa a VII-a, editura Taida, 2007